

円の大きさの発見

1654年 ホイヘンスによる円周率の計算

埼玉県立坂戸高等学校 田沼晴彦

概要

1654年、25歳のクリスティアン・ホイヘンスは、『円の大きさの発見』(*De circuli magnitudine inventa*)を公表した。このときホイヘンスは、大学での勉学とヨーロッパを巡る旅行を終え、故郷ハーグで研究生活に入っている。彼は、最初の研究テーマとして円積問題を取り上げ、1651年には *Cyclometriae* を、そしてここで報告する *De circuli magnitudine inventa* を1654年には書き上げた。

この論文の目的は、少ない辺数の内外接多角形から円周の直径に対する比 π の値を高精度で導くスネル (Willebrord Snell) の *Cyclometricus* の命題を正しく証明し、さらなる発見を明らかにすることにあつた。

この結果を三角関数で置き換えれば、高校数学での話題として興味深いトピックである。しかし実際に、ホイヘンスがどのようにしてこれらの命題を証明したのだろうか。ホイヘンスの論文『円の大きさの発見』*De circuli magnitudine inventa*(以後『発見』)を読み、彼の幾何学的方法そして求積の議論を明らかにし、また重心を用いた方法についても検討を加える。

1 はじめに

ホイヘンスがこの論文で展開した方法は、アルキメデスの内外接する正多角形の周の長さから円周を上下限を決定する方法の延長にある。しかしこの研究に至る前段階としては、中世のクサのニコラス (Nicolaus Cusanus) よる π の近似式 (1450)([1] p.90)の研究がある。それは三角法を用いて表すならば式 (1) となる。

$$\theta \approx \frac{3 \sin \theta}{2 + \cos \theta} \quad (1)$$

また円に内外接する 15×2^{31} 角形の周の長さを、膨大な計算から求めたルドルフ・ファン・ケーレンの π の値 (小数点以下 20 桁 1596)。さらにホイヘンスが証明することになるヴィレブロルト・スネルの『測円法』(*Cyclometricus* 1621)の命題 (図1, 式(2))がある。

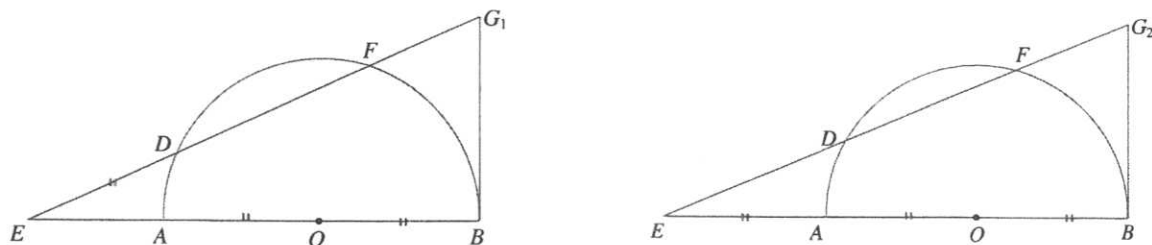


図1

$$BG_2 < \widehat{BF} < BG_1 \quad (2)$$

ホイヘンスはここで、30年前のスネルの『測円法』の定理に厳密な証明を与え、さらに彼自身がタイトルに『発見』と書いているように、図形の重心の理論を基にしてさらなる円の大きさをの精密化を実現を目指していた。

1654年に出版された『発見』は、*Oeuvres complètes*[5]あるいは19世紀にF.Rudioによるドイツ語訳[3]を調べる以外方法がないと思われた。しかし偶然、ボストン大学のサイトからPearsonの修士学位論文(1923)[4]中に『発見』の英語訳を発見し、不明瞭であった議論の詳細を調べることができた。

2 『円の大きさの発見』 *De Circuli Magnitudine Inventa*

2.1 序文

ホイヘンスは初めに、それまでの円積問題の発展への批判から始めている。“これまでのこの問題の研究は有益ではあるが(中略)特殊な器具や虚偽を織り交ぜたものもあり、それらの証明には価値がない” そのうえで受け入れられる前

提は、“円の面積は、内接する多角形より大きくかつ外接する多角形より小さいという事実だけ”であると限定した。

ホイヘンスはまた、スネルの *Cylometricus* について、“この命題はきわめて正しい知識を明らかにしているが、彼が証明したと主張している議論は明確さに欠ける”と批判していた。

このように、25歳のホイヘンスは自信に満ち“スネルの定理を厳密に証明を与えた”と宣言していた。その方法は、弧の長さを内外接する相似な多角形の辺の長さの比例中項をとることで、少ない辺数の多角形から円周の長さの上下限が得られると述べ、その幾何学的証明はユークリッドの原論の基づき、また重心の考察を細心の注意を払って応用するならば、さらなる達成が可能となると主張していた。彼の証明を読むと、そこにはアルキメデスの方法がよく反映していることもわかる。

また彼は、この円積問題の応用の重要性をについて、この命題を使うことでより少ない労力で弧の長さが決定できること、すなわち逆に弧長から弦および正弦の値が定められる点を強調してる。それは17世紀においても大航海時代同様三角表には誤りが多く、それを改善する簡便な方法が求められていた事情も読み取れる。さらに、この研究が単に円周の直径に対する比の高精度計算を目的としていたなされたのではなく、その困難な証明を通じた数学方法の創造にあることを主張していた。

2.2 構成

序文に続き、円の弓形に内外接する三角形の面積と弓形の大小関係を決定する命題 I,II,III,IV が提示され、結果として、円の弓形の面積の上下限が定められている。

$$\frac{4}{3}\Delta \text{内接三角形 } ABC < \text{弓形 } ABC < \frac{2}{3}\Delta \text{外接三角形 } ADC$$

続く命題 V,VI から、円の面積と内外接する多角形の大小関係が決定される。さらに命題 VII,VIII,IX を通して、その関係が周の長さに変換されていく。

ここで、

$$\begin{cases} \text{内接 } n \text{ 角形の面積} : S_n \\ \text{外接 } n \text{ 角形の面積} : T_n \end{cases} \quad \begin{cases} \text{内接 } n \text{ 角形の周の長さ} : P_n \\ \text{外接 } n \text{ 角形の周の長さ} : Q_n \end{cases}$$

とするならば、円の面積およびその周長の上下限はつぎのように決定される。

$$\begin{aligned} S_{2n} + \frac{1}{3}(S_{2n} - S_n) &< \text{円の面積} < \frac{2}{3}T_n + \frac{1}{3}S_n \\ \rightarrow P_{2n} + \frac{1}{3}(P_{2n} - P_n) &< \text{円周の長さ} < \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{3}P_n \end{aligned}$$

ホイヘンスは続く命題 X で、この円周の上下限を具体的に計算し、内接正6角形および12角形と外接12角形からアルキメデスと同等の結果

$$3\frac{10}{71} < \text{円周の直径に対する比} < 3\frac{1}{7}$$

を導いている。さらに内接30角形と60角形および外接60角形の結果とケーレンの計算を比較し、ホイヘンスは自らの方法の優越性を主張している。

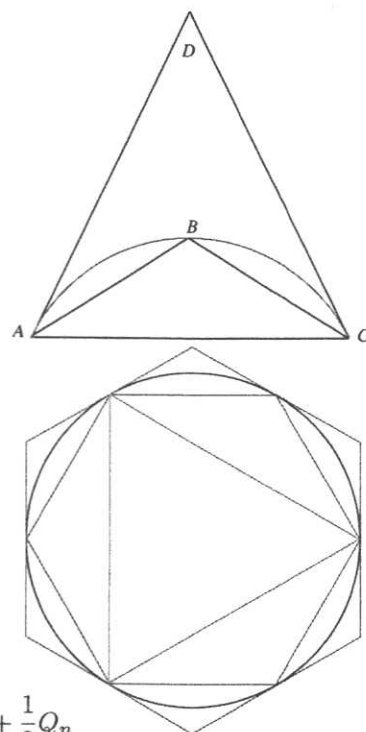
また命題 XI,XII,XIII において、では円周および弧の長さに等しい線分の作図方法が示され、命題 XIV と XV は円に内外接する多角形の辺の長さの比例関係を議論している。その後の命題 XV,XVI において、すでに得た円周の上下限の命題からスネルの結果を導いている。ここまでの、今回報告できる内容である。

2.3 弓形の面積の上下限

命題 I

弓形 ABC に内接する最大の $\triangle ABC$ 、弓形の残された部分にさらに内接する $\triangle AEB$ と $\triangle BFC$ に対し、つぎの関係が成り立つ。

$$\triangle ABC < 4 \cdot (\triangle AEB + \triangle BFC) \tag{3}$$



証明

$$EB > \frac{1}{2}AB \rightarrow AB^2 < 4EB^2$$

$$\text{また } \begin{cases} \triangle ABP \sim \triangle ABD \rightarrow AB^2 = BD \times BP \\ \triangle EBP \sim \triangle EBG \rightarrow EB^2 = BG \times BP \end{cases}$$

$$\therefore BD < 4BG$$

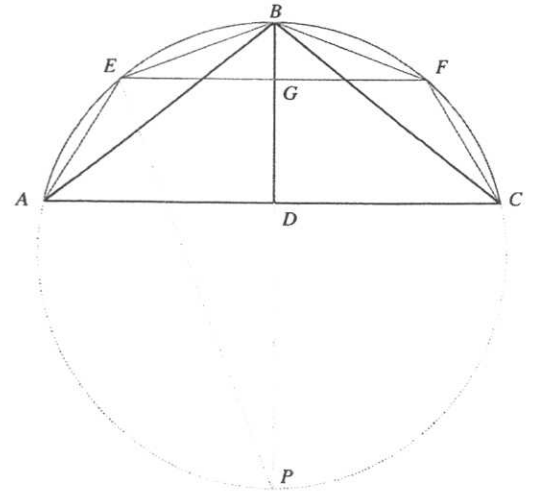
$$\text{ここで } EF = AB \rightarrow AC < 2AB = 2EF$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2}AC \cdot BD < \frac{1}{2}2EF \cdot 4BG$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}EF \cdot BG = 8 \cdot \triangle EBF$$

$$\triangle EBF \equiv \triangle AEB \equiv \triangle BFC$$

$$\rightarrow \therefore \triangle ABC < 4(\triangle AEB + \triangle BFC)$$



命題 II

弓形 ABC は、頂点 B の接線を底辺とする $\triangle FEG$ に対し、つぎの関係が成り立っている。

$$\triangle FEG > \frac{1}{2}\triangle ABC \quad (4)$$

証明

$\triangle AEC$, $\triangle FEG$, $\triangle AFB$, $\triangle BGC$ は二等辺三角形

$$FE > FB = AF \rightarrow AE = AF + FE < 2FE$$

$$FE > \frac{1}{2}AE \rightarrow \begin{cases} EB > \frac{1}{2}EH \\ FG > \frac{1}{2}AC \end{cases}$$

$$\triangle FEG = \frac{1}{2}FG \cdot EB > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}EH = \frac{1}{4}\triangle AEC$$

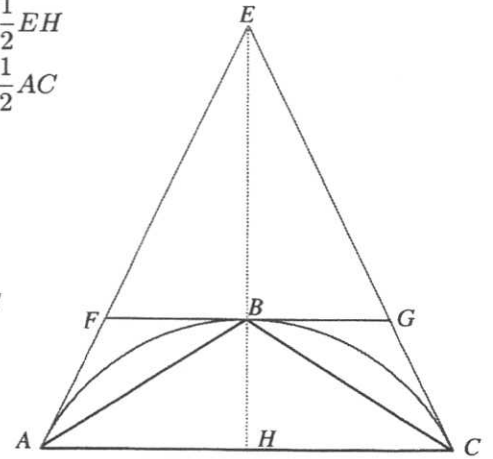
$$\therefore \triangle FEG > \frac{1}{4}\triangle AEC$$

$$\text{一方、} FE > \frac{1}{2}AE \rightarrow FA = AE - FE < AE - \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}AE$$

$$FA < \frac{1}{2}AE \rightarrow BH < \frac{1}{2}EH$$

$$\triangle ABC < \frac{1}{2}\triangle AEC = 2 \cdot \frac{1}{4}\triangle AEC < 2 \cdot \triangle FEG$$

$$\rightarrow \therefore \triangle FEG > \frac{1}{2}\triangle ABC$$



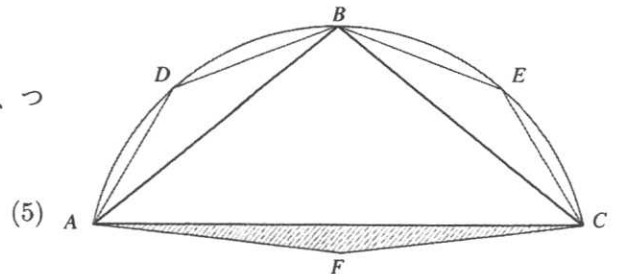
命題 II

命題 I により弓形を埋め尽くす内接三角形間の大小関係が、そして命題 II により内接三角形と外接三角形の大小関係が示された。つぎの命題 III と IV でホイヘンスは、与えられた弓形と、それに内外接する三角形との大小関係を示していく。弓形を三角形で埋めていくことでその面積を求める方法であるが、そこには無限個の三角形という考えはない。あくまで有限個の三角形から弓形と内外接する三角形の大小関係を求めている。

命題 III

弓形 ABC とそれに内接する最大の三角形 ABC の間には、つぎの大小関係が成り立っている。

$$\text{弓形 } ABC > \frac{4}{3}\triangle ABC$$



命題 III

証明

ここで $\triangle AFC$ は十分小さいとするならば、命題 I より

$$\triangle ABC + \triangle AFC < 4(\triangle ADB + \triangle BEC) \rightarrow \diamond ABCF < 4(\triangle ADB + \triangle BEC)$$

ここで弓形 ABC から $\triangle ABC$ を取り去った残りの部分に内接する最大の三角形 $\triangle ADB$ と $\triangle BEC$ を作図し、この残りの部分からさらにこの2個の三角形を取り去る → さらにその残りの部分から内接三角形4つを取り去る … この操作を、残りの部分の面積 $< \triangle ACF$ となるまで繰り返す*1。
 ホイヘンスの論文にはないが、簡単ため最後の内接三角形の面積の和を $\Sigma\Delta_n$ と表すならば、つぎのような面積和を得る。

$$\diamond ABCF + (\triangle ADB + \triangle BEC) + \dots + (\Sigma\Delta_n)$$

この和にさらに、 $\frac{1}{3}(\Sigma\Delta_n)$ を加えるならば、

$$\begin{aligned} & \diamond ABCF + (\triangle ADB + \triangle BEC) + \dots + (\Sigma\Delta_n) + \frac{1}{3}(\Sigma\Delta_n) \\ & > \diamond ABCF + \frac{1}{4}\diamond ABCF + \frac{1}{4^2}\diamond ABCF + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF \\ & = \frac{4}{3}\diamond ABCF \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABC + (\triangle ADB + \triangle BEC) + \dots + (\Sigma\Delta_n) + \frac{1}{3}(\Sigma\Delta_n) > \frac{4}{3}\triangle ABC + \frac{1}{3}\triangle ACF$$

ここで、 $(\Sigma\Delta_n) < \triangle ACF$ より、

$$\triangle ABC + (\triangle ADB + \triangle BEC) + \dots + (\Sigma\Delta_n) > \frac{4}{3}\triangle ABC$$

$$\text{弓形 } ABC > \triangle ABC + (\triangle ADB + \triangle BEC) + \dots + (\Sigma\Delta_n) \text{ より}$$

$$\therefore \text{弓形 } ABC > \frac{4}{3}\triangle ABC$$

命題 IV

つぎに、弓形 ABC の面積の上限を外接三角形から求めていく。

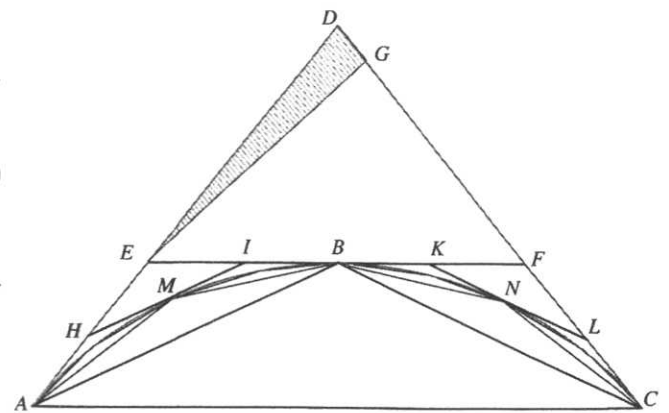
$$\text{弓形 } ABC < \frac{2}{3}\triangle ADC \quad (6)$$

証明

命題 II $\triangle EDF > \frac{1}{2}\triangle ABC$ より、 $\triangle EDG$ を十分に小さい面積とすれば、

$$\triangle EGF > \frac{1}{2}\triangle ABC$$

は成り立つ。



ここで、弧 ABC と直線 AD 、 EG そして DC で囲まれた部分の面積から、 $\triangle EGF$ を取り去る。

つぎに残された部分から、 M における円の接線を HI 、 N における接線を KL とし、 $\triangle HEI$ と $\triangle KFL$ を取り去る

残された部分から円に接する三角形を除くことを、残りの面積 $< 2\triangle EDG$ となるまで繰り返す。

そのとき、命題 II よりつぎのようなそれぞれ対応する三角形間の関係がある。

$$\triangle EGF > \frac{1}{2}\triangle ABC \rightarrow \begin{cases} \triangle HEI > \frac{1}{2}\triangle AMB \\ \triangle KFL > \frac{1}{2}\triangle BNC \end{cases}$$

この操作の最後の弓形の外の三角形の面積和を $\Sigma\Delta_C$ 、それらの三角形に対応する弓形内部の三角形の面積和を $\Sigma\Delta_I$ とするならば*2、

$$\begin{aligned} & \triangle EGF + (\triangle HEI + \triangle KFL) + \dots + (\Sigma\Delta_C) > \frac{1}{2}\triangle ABC + \frac{1}{2}(\triangle AMB + \triangle BNC) + \dots + \frac{1}{2}(\Sigma\Delta_I) \\ & \rightarrow \triangle EGF + (\triangle HEI + \triangle KFL) + \dots + (\Sigma\Delta_C) > \frac{1}{2}(\text{弓形内部の三角形面積和}) \end{aligned}$$

*1 ホイヘンスは明確に述べていないが、残りの部分の面積 $< \triangle AFC$ となった時点で、最後の内接三角形 Σ_n と取る → $\Sigma_n < \triangle AFC$

*2 説明を簡単にするため、筆者が導入

ここで、 $\triangle EDG > 2 \cdot$ 弓形内部の残り部分 より

$$\begin{aligned} \rightarrow \triangle EGF + (\triangle HEI + \triangle KFL) + \dots + (\Sigma \triangle C) + \triangle EDG \\ > \frac{1}{2}(\text{弓形内部の三角形面積和}) + \frac{1}{2}(\text{弓形内部の残り部分}) \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle EDF + (\triangle HEI + \triangle KFL) + \dots + (\Sigma \triangle C) > \frac{1}{2} \text{弓形 } ABC$$

$$\rightarrow \triangle ADC - \text{弓形 } ABC > \frac{1}{2} \text{弓形 } ABC \rightarrow \triangle ADC > \frac{3}{2} \text{弓形 } ABC$$

$$\therefore \text{弓形 } ABC < \frac{2}{3} \triangle ADC$$

このように、弓形の面積を内外接する三角形により限定することができた。

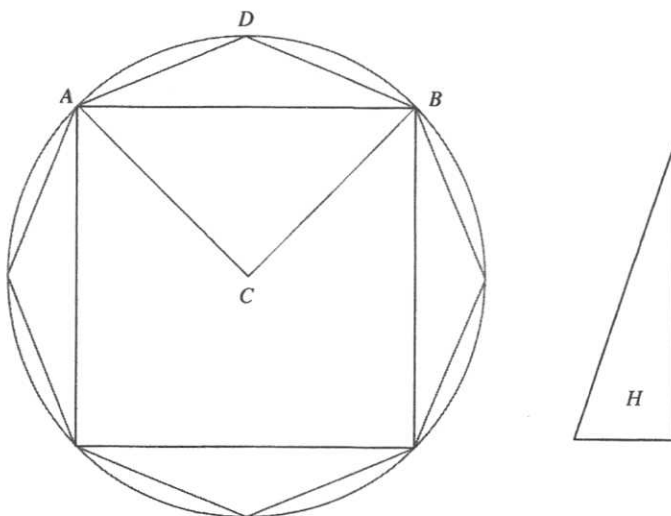
$$\frac{4}{3} \triangle \text{内接三角形 } ABC < \text{弓形 } ABC < \frac{2}{3} \triangle \text{外接三角形 } ADC$$

2.4 円の面積および円周の上下限

命題 V

$$\text{円の面積} > \frac{4}{3}(\text{内接 } 2n \text{ 角形の面積}) - \frac{1}{3}(\text{内接 } n \text{ 角形の面積}) \quad (7)$$

証明



これまで命題 III において 弓形 $ADB > \frac{4}{3} \triangle ADB$ をすでに証明してある。また、図形 H の面積をつぎのように定める*3。

$$H = \frac{1}{3}(\text{多角形 } ADB - \text{多角形 } AB)$$

ならば、

$$\text{弓形 } ADB = \text{弓形 } AD + \text{弓形 } DB + \triangle ADB > \frac{4}{3} \triangle ADB$$

$$\rightarrow \text{弓形 } AD + \text{弓形 } DB > \frac{1}{3} \triangle ADB$$

$$\rightarrow \text{扇形 } CAB = \diamond CADB + \text{弓形 } AD + \text{弓形 } DB > \diamond CADB + \frac{1}{3} \triangle ADB$$

$$\text{扇形 } CAB > \diamond CADB + \frac{1}{3} \triangle ADB$$

また、 $\left\{ \begin{array}{l} \text{扇形} : \text{円} = \diamond CADB : \text{多角形 } ADB \\ \text{扇形} : \text{円} = \triangle CAB : \text{多角形 } AB \end{array} \right.$ より

*3 この図形 H の役割は、理解できていない。そのまま内接多角形間の面積差の3分の1としても証明には何の不足もない。

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{扇形: 円} &= \diamond CADB - \triangle CAB : \text{多角形 } ADB - \text{多角形 } AB \\ &= \frac{1}{3}\triangle ADB : \frac{1}{3}(\text{多角形 } ADB - \text{多角形 } AB) \\ &= \frac{1}{3}\triangle ADB : H \end{aligned}$$

$$\text{扇形} > \diamond CADB + \frac{1}{3}\triangle ADB \rightarrow \text{円} > \text{多角形 } ADB + H$$

が導かれる。

命題 VI

$$\text{円の面積} < \frac{2}{3}(\text{外接 } n \text{ 多角形}) + \frac{1}{3}(\text{内接 } n \text{ 多角形})$$

証明

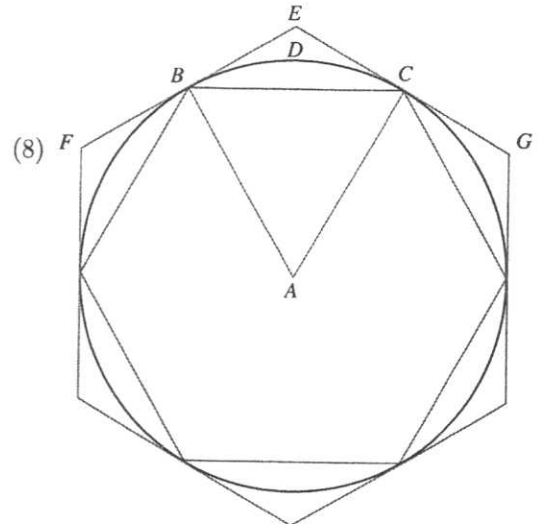
命題 IV において、弓形 $BDC < \frac{2}{3}\triangle BEC$ を得ている。

$$\rightarrow \text{弓形 } BDC + \triangle ABC < \frac{2}{3}\triangle BEC + \triangle ABC$$

$$\rightarrow \text{扇形 } ABC < \frac{2}{3}\diamond ABEC + \frac{1}{3}\triangle ABC$$

ならば、円の面積の上限が導かれる。

$$\text{円} < \frac{2}{3}\text{外接多角形 } FEG + \frac{1}{3}\text{内接多角形 } BC$$



命題 VI

命題 V において、円の面積の下限を内接多角形の面積から定めた。つぎに、それら多角形の面積をその周の長さを底辺とし、高さを半径とする三角形で表し、面積の下限を周長の下限へと変換する。

命題 VII

$$\text{円周} > (\text{内接 } 2n \text{ 多角形の周}) + \frac{1}{3}\{(\text{内接 } 2n \text{ 多角形の周}) - (\text{内接 } n \text{ 多角形の周})\} \quad (9)$$

証明

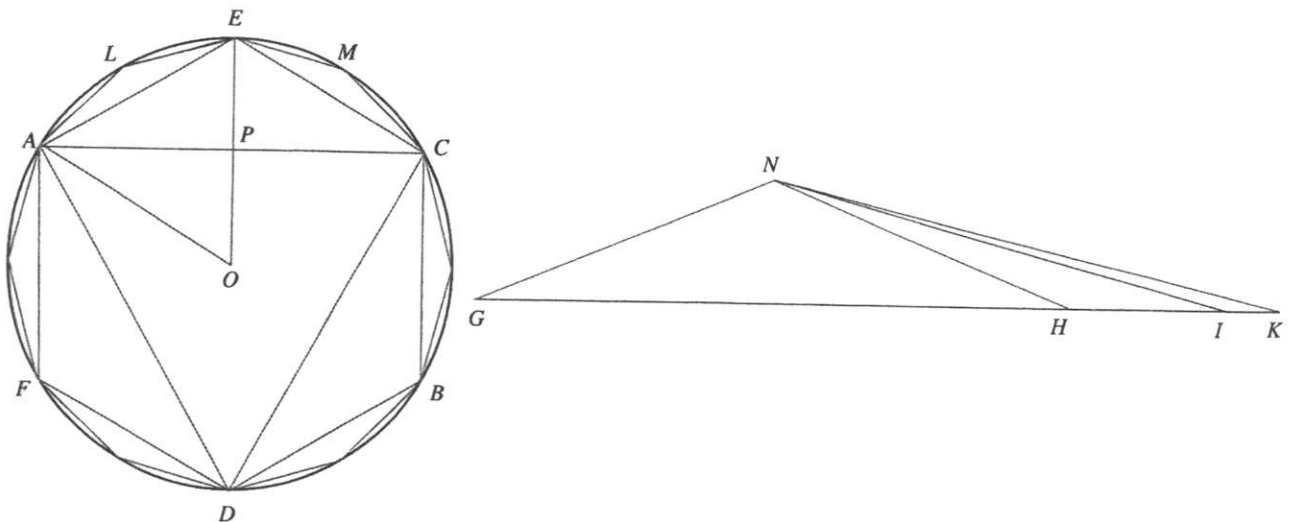


図 2: 命題 VII

円には内接多角形 ACD 、その辺数が 2 倍の多角形 $AECBDF$ 、さらに 2 倍の $ALEMC$ が書かれている。また図 2 では

$$GH = \text{内接多角形 } ACD \text{ の周}, \quad GI = \text{内接多角形 } AECBDF \text{ の周}$$

と定める。ならば HI は 2 つの周の差となる。ここで $IK = \frac{1}{3}HI$ とする。さらに直線 GH, GI, IH を底辺、半径 OA を高さとする $\triangle GNH, \triangle GNI, \triangle HNI$, を作図する。すなわち

$$\begin{cases} HI = \text{内接多角形 AECBDF の周} - \text{内接多角形 ACD の周} \\ IK = \frac{1}{3}(\text{内接多角形 AECBDF の周} - \text{内接多角形 ACD の周}) \end{cases}$$

$\triangle GNH$ の面積 = 多角形 AECBDF の面積

$$\therefore \frac{AP}{P_n} = \frac{\triangle AEO}{S_{n+1}} \rightarrow P_n = \frac{AP \cdot S_{n+1}}{\triangle AEO}$$

$$\rightarrow \triangle GNH = \frac{1}{2}P_n \cdot \text{半径} = \frac{1}{2}AP \cdot \text{半径} \cdot \frac{S_{n+1}}{\triangle AEO} = \triangle AEO \cdot \frac{S_{n+1}}{\triangle AEO} = S_{n+1}$$

同様に $\triangle GNI$ の面積 = 多角形 ALEMC の面積

ならば $\triangle HNI = \text{多角形 ALEMC の面積} - \text{多角形 AECBDF の面積}$

$$\rightarrow \triangle GNK = \triangle GNI + \triangle INK = \triangle GNI + \frac{1}{3}\triangle HNI$$

$$= \text{多角形 ALEMC の面積} + \frac{1}{3}(\text{多角形 ALEMC の面積} - \text{多角形 AECBDF の面積})$$

命題 V より 多角形 ALEMC の面積 + $\frac{1}{3}$ (多角形 ALEMC の面積 - 多角形 AECBDF の面積) < 円の面積

$\therefore \triangle GNK$ の面積 < 円の面積

$$\rightarrow \frac{1}{2}GK \cdot \text{半径} < \frac{1}{2}\text{円周} \cdot \text{半径} \rightarrow GK < \text{円周}$$

$$GK = GI + IK = \text{内接多角形 AECBDF の周} + \frac{1}{3}(\text{内接多角形 AECBDF の周} - \text{内接多角形 ACD の周})$$

$$\therefore \text{内接 } 2n \text{ 多角形の周} + \frac{1}{3}(\text{内接 } 2n \text{ 多角形の周} - \text{内接 } n \text{ 多角形の周}) < \text{円周}$$

円周の上限は、命題 VIII と IX の 2 ステップにより、面積の上限から周の上限へと変換している。

命題 VIII

$$\widehat{EC} < \frac{2}{3}CD + \frac{1}{3}EC \quad (10)$$

証明

中心 A の円の直径を BC、その端の接線を DC、E における接線を EG、 $EF \perp BC$ とする。ここで、 $\angle GED = \angle GDE$ より、 $\triangle DEG$ は二等辺三角形である。また EG と GC は接線であるため、

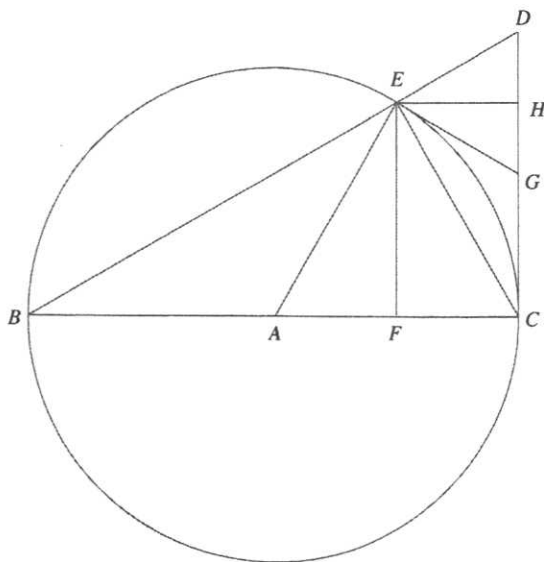
$$EG = DG = GC$$

また、 $\triangle AEGC$ の面積は底辺の長さ CD 高さ CA の $\triangle ACD$ の面積に等しい。

$$\triangle AEGC = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AC$$

$$\therefore \triangle AEGC = \triangle AEC + \triangle EGC$$

$$= \triangle ACH + \frac{1}{2}CG \cdot CF = \triangle ACH + \frac{1}{2}DG \cdot FC$$



ここで

$$\triangle AEC \sim \triangle GED \quad \therefore \angle AEC = \angle ACE = \angle GED = \angle AEC$$

よって、

$$\begin{cases} AC : DG = EF : FC \rightarrow \frac{AC}{DG} = \frac{EF}{FC} \rightarrow DG = \frac{FC \cdot AC}{EF} \\ EF : FC = EH : DH \rightarrow \frac{FC}{EF} = \frac{DH}{EH} \rightarrow \frac{FC}{EF} = \frac{DH}{FC} \end{cases}$$

$$\diamond AEGC = \triangle ACH + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{FC}{EF} \cdot FC = \triangle ACH + \frac{1}{2} AC \cdot \frac{DH}{FC} \cdot FC$$

$$= \triangle ACH + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DH = \triangle ACH + \triangle ADH = \triangle ACD$$

$$\therefore \diamond AEGC = \triangle ACD$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} \diamond AEGC + \frac{1}{3} \triangle AEC = \frac{2}{3} \triangle ACD + \frac{1}{3} \triangle AEC$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot CD \times AC \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot EF \times AC \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \left(\frac{2}{3} \cdot CD + \frac{1}{3} \cdot EF \right)$$

すなわち、 $\frac{2}{3} \diamond AEGC + \frac{1}{3} \triangle AEC$ は、底辺 $\frac{2}{3} \cdot CD + \frac{1}{3} \cdot EF$ 、高さが半径 AC の三角形の面積に等しい。

$$\text{一方命題 VI より } \frac{2}{3} \diamond AEGC + \frac{1}{3} \triangle AEC > \text{扇形 } AEC$$

$$\text{ならば } \frac{1}{2} \cdot AC \left(\frac{2}{3} \cdot CD + \frac{1}{3} \cdot EF \right) > \frac{1}{2} AC \cdot \widehat{EC}$$

$$\therefore \frac{2}{3} \cdot CD + \frac{1}{3} \cdot EF > \widehat{EC}$$

この命題により、弧の長さの上限を、内接多角形の辺 EF と外接する CD から定めている。ただし CD は外接する多角形辺よりも短い。つぎの命題で、弧の上限は内外接する多角形の周の長さにより定められる。

命題 IX

$$\text{円周} < \frac{2}{3} \text{内接 } n \text{ 多角形} + \frac{1}{3} \text{外接 } n \text{ 角形} \quad (11)$$

ユークリッド『原論』第5巻命題 25*4より、

$$\begin{cases} EG > KG > CH \\ EG : KG > KG : CH \end{cases} \rightarrow EG + CH > 2 \cdot KG$$

よって

$$\frac{1}{3}(EG + CH) > \frac{2}{3}KG \rightarrow \frac{1}{3}EG + \frac{1}{3}CH + \frac{1}{3}CH > \frac{2}{3}KG + \frac{1}{3}CH \rightarrow \therefore \frac{2}{3}CH + \frac{1}{3}EG > \frac{2}{3}KG + \frac{1}{3}CH$$

$$\text{ここで命題 VIII より、} \frac{2}{3}KG + \frac{1}{3}CH > \widehat{CG}$$

$$\therefore \frac{2}{3}CH + \frac{1}{3}EG > \widehat{CG}$$

*4

$$\begin{cases} A : B = C : D \\ A > B > C > D \end{cases} \rightarrow A + D > B + C$$

証明

円 A に内外接する相似な正多角形が作図されている。直径 BG 上に $HL = HG$ となるように点 L をとる。

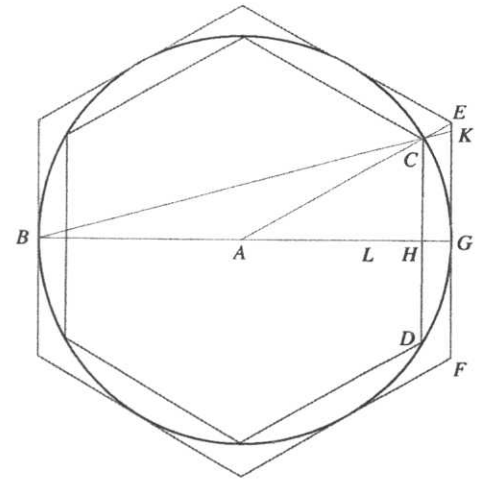
$$\frac{HB}{BL} > \frac{GB}{BH} \rightarrow \frac{HB}{BL} \cdot \frac{GB}{HB} > \frac{GB}{BL} \cdot \frac{GB}{BL} \rightarrow \frac{GB}{BL} > \frac{GB^2}{BH^2}$$

また、 $\triangle ACH \sim \triangle AEG$ 、 $\triangle BCH \sim \triangle BKG$ より

$$\frac{GA}{AH} = \frac{EG}{CH}, \quad \frac{GB}{BH} = \frac{KG}{CH}$$

ならば、

$$\frac{GB}{BL} > \frac{GB^2}{BH^2} \rightarrow \frac{EG}{CH} > \frac{KG^2}{CH^2} \rightarrow \frac{EG}{KG} > \frac{KG}{CH}$$



2.5 具体的計算と作図方法

つぎの3つの命題では、具体的な円周の長さを求め、それらをアルキメデスおよびケーレンの結果と比較検討している。しかしホイヘンスの目的は、厳密な証明による π を限定する方法にある。“それ(計算)には多大な時間がかかる”と述べているだけで、具体的に多角形の辺の長さの計算方法も示されていない。ここでは命題 X だけを紹介する。

命題 X

円周と直径の比を、任意の精度で得ること

ホイヘンスはここで、円周の下限を命題 VIII より、上限を命題 IX から求め、その精度を確認している。

$$\text{命題 VIII} \quad \text{円周} > \frac{4}{3} \text{内接 } 2n \text{ 角形} - \frac{1}{3} \text{内接 } n \text{ 角形}$$

具体的に内接正6角形と12角形、さらには正30角形と正60角形にこの命題を適用して計算している。6角形と12角形の上下限からアルキメデスの結果を比べ、続いて30および60角形を計算し、ケーレンの10800角形の計算と比較を行った。ただ、彼がどのような方法で、これらの内外接多角形の辺の長さを求めたのかは書かれていない。おそらく、60角形の1つの辺の中心角を6度の、厳密な三角比を求め計算を行ったのかもしれない。

半径を10,000とする。ならば、

$$\begin{cases} \text{内接6角形の辺} = 10,000 \rightarrow P_6 = 10,000 \\ \text{内接12角形の辺} > 5176\frac{2}{5} \rightarrow P_{12} > 62116\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow P_{12} + \frac{1}{3}(P_{12} - P_6) > 62822$$

この値の直径20,000に対する比は、アルキメデスの下限 $3\frac{10}{71}$ よりも大きい

$$3\frac{10}{71} < \frac{62822}{20000} < \text{円周の直径に対する比}$$

つぎに、円周の上限を定める命題 IX を用いる。

$$\text{命題 IX} \quad \text{円周} < \frac{2}{3} \text{内接 } n \text{ 角形} + \frac{1}{3} \text{外接 } n \text{ 角形}$$

内接正12角形と外接正12角形を用いる。

$$\begin{cases} \text{内接12角形の辺} < 5176\frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{3}P_{12} < 41411\frac{1}{5} \\ \text{外接12角形の辺} < 5359 \rightarrow \frac{1}{3}Q_{12} < 21436 \end{cases} \rightarrow \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}Q_n < 62847\frac{1}{5}$$

ならば、命題 IX より

$$\frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}Q_n < 62847\frac{1}{5}$$

この値の直径 20,000 に対する比は、アルキメデスの上限 $\frac{22}{7}$ よりも小さい

$$\text{円周の直径に対する比} < \frac{62847\frac{1}{5}}{20000} < \frac{22}{7}$$

つぎにホイヘンスは、半径を 100,000,000 とし、内外接する正 60 角形と内接 30 角形を用いて計算する。

$$\begin{cases} \text{内接 60 角形の辺の長さ} < 10,467,192 & \rightarrow \text{円周の } \frac{1}{60} \text{ の弧の弦} < 10,467,192 \\ \text{内接 30 角形の辺の長さ} > 20,905,693 & \rightarrow \text{円周の } \frac{1}{60} \text{ の弧の正弦} > 10,452,846\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{60} \text{円周} > \text{弦} + \frac{1}{3}(\text{弦} - \text{正弦}) > 1,047,192\frac{1}{2} \rightarrow \therefore \text{円周} > 628,318,350$$

またこのときの円周の上限は、外接 60 角形の辺の長さ $< 10,481,556$ を用いて

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \text{内接 60 角形の辺} < 6,978,128 \\ \frac{1}{3} \text{外接 60 角形の辺} < 3493852 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{1}{60} \text{円周} < \frac{2}{3} \text{内接 60 角形の辺} + \frac{1}{3} \text{外接 60 角形の辺} = 10471980 \rightarrow \therefore \text{円周} < 628,318,800$$

と計算した。ただ最後の数値は、628,318,768 と計算できる。よってホイヘンスはこのときの円周の直径に対する比を

$$3.14159175 < \pi < 3.14159400 \quad (3.14159384)$$

と定めることができた。

さらに彼は、ケーレンの内外接する 10,800 角形の周の計算結果と比較を行った。

ケーレンは、半径を 1,000,000,000,000 とし

$$\begin{cases} \text{内接 10,800 角形の辺} < 58,177,640,912,684,919 \\ \text{外接 10,800 角形の辺} < 58,177,643,374,063,182 \end{cases}$$

$$\rightarrow 6,283,185,307,179,504 < \text{円周} < 6,283,183,507,179,589$$

$$\rightarrow 3.141,592,653,589,752 < \pi < 3.141,592,653,589,794$$

を得ていた。ホイヘンスは自らの方法が、同じ多角形になれば 2 倍の精度であることを主張した。

2.6 スネルの命題の導出

つぎの命題 XV と XVI は、スネルの *Cyclometricus* で主張した弧の長さの定理である。ホイヘンスは“その議論 (*Cyclometricus*) には疑問が多い”と批判し、証明を与えた。

命題 XV

AB を円の直径とし、 DE の長さは半径に等しい。このとき、接線 BG は弧 FB より大きいと主張する。

$$ED = AC \rightarrow \widehat{FB} < GB \quad \text{上限} \quad (12)$$

証明 $HL // EG$ とする。ならば、 $DK = KH$ より $\triangle EDK \equiv \triangleCHK$ 。

$$\widehat{DH} = \widehat{FM} = 2\widehat{AH} = 2\widehat{MB} \rightarrow \therefore \widehat{FB} = 3\widehat{AH}$$

弧 HA に対し、 HK はその正弦、 LB はその正接となる。ならば命題 IX より

$$\frac{2}{3}HK + \frac{1}{3}LB > \widehat{AH} \rightarrow 2HK + LB > 3\widehat{AH} \rightarrow GL + LB > \widehat{BF}$$

よって、 $GB > \widehat{BF}$ は成り立つ。

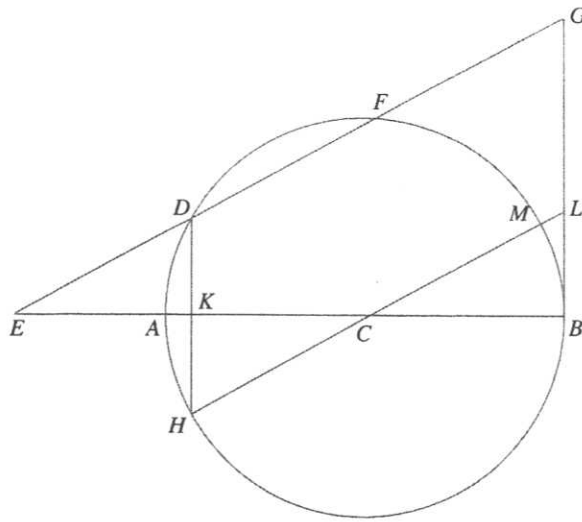


図 3: 命題 XV

図 3 において、 $\angle BCL = 3\theta$ とすれば、いわゆるスネル・ホイヘンスの上限であるつぎの不等式が導くことができる。

$$3\theta < \tan \theta + 2 \sin \theta \rightarrow \therefore \theta < \frac{\tan \theta + 2 \sin \theta}{3}$$

命題 XVI

$$AC = \text{半径} \rightarrow LB < \widehat{BE} \quad \text{下限} \quad (13)$$

証明

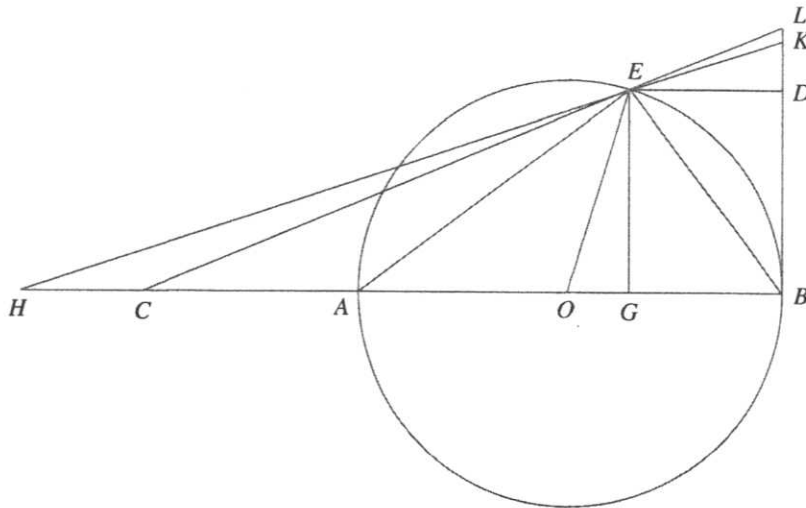


図 4: 命題 XVI

$AE = AH$ となる点 H を直径 AB の延長線上にとる。ならば $\triangle HAE$ は二等辺三角形。

$$\begin{cases} \angle H = \angle HEA \\ \angle AEB = \angle R \end{cases} \rightarrow \angle BEK = \angle BKE \rightarrow \triangle BEK : \text{二等辺三角形}$$

$$DK = BK - BD = BE - EG$$

$$\triangle AEG \sim \triangle ABE \rightarrow AG : AE = AE : AB \rightarrow AG + AB > 2AE \quad \therefore \text{Elem. 25.5}$$

$$\rightarrow AE (= AH) < \frac{AG + AB}{2} < CA + \frac{AB}{2} \rightarrow AE - CA < \frac{AB}{2} \rightarrow CH < \frac{AB}{2}$$

$$\text{一方 } CA > \frac{1}{2}AG \rightarrow AG + CA > \frac{3}{2}AG \rightarrow CG > 3CH$$

$$\begin{cases} \triangle HEG \sim \triangle EKD \rightarrow HG : GE = ED : DK \\ \triangle CEG \sim \triangle ELD \rightarrow EG : GC = LD : DE \end{cases}$$

$$\rightarrow HG : GC = LD : DK$$

$$\rightarrow \frac{HC + GC}{GC} = \frac{LK + KD}{DK} \rightarrow \frac{CH}{GC} + 1 = \frac{KL}{DK} + 1 \rightarrow \frac{GC}{CH} = \frac{DK}{KL}$$

$$\text{ここで } GC > 3CH \rightarrow DK = \frac{KL}{CH} \cdot 3CH \rightarrow DK > 3 \cdot KL \therefore KL < \frac{1}{3}DK$$

$$\text{一方 } DK = EB - EG \quad \therefore KL < \frac{1}{3}(EB - EG)$$

$$\text{命題 VII より } \widehat{BE} > EB + \frac{1}{3}(EB - EG) > EB + KL = KB + KL$$

$$KB + KL = LB < \widehat{BE}$$

この命題において、 $\angle EOB = \theta$ とするならば、スネル・ホイヘンスの下限の公式を得ることができる。

$$\frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} < \theta$$

3 まとめ

P. ベックマンは、著書『 π の歴史』[1]の中で、“最後のアルキメデス派”という表現でこの「スネル・ホイヘンスの限界」の公式を紹介していた。少し計算すればわかることだが、高々正12角形でアルキメデスの成果 $\pi \doteq 3.14$ を導くことができる驚異的な公式である。しかし、 π の計算方法としては、アルキメデスの多角形による方法と微積分法以後の無限級数公式の間に隠れ、あまり知られていないのも事実ではないだろうか。

ただ、スネルがなぜこの公式に到達できたのか、そしてホイヘンスはどのようにして厳密にこの公式を証明したのか、それらを解説した本もまた資料もないように思える。確かに平山諦の『円周率の歴史』[2]を参考にすれば、そこに書かれてある命題を三角法と無限級数を用いてそれなりに証明はできる。しかしホイヘンスはどのようにそれを明らかにしたのだろうか、長い間疑問に持ち続けていた。

数年前、Rudioによるホイヘンスの『発見』のドイツ語訳が『Archimedes, Huygens...』[3]の本に収められ、簡単に入手できた。この本を読み、疑問を解決してみようと思いついたのだが、証明の十分な理解にはとても至らずにいた。

しかし最近、偶然にもインターネット上でRudioの英語訳を発見した。1923年にボストン大学で修士号取得のため、Hazel Pearsonが提出した論文[4]である。このPearsonの論文の提出は、1921年にヒースが『ギリシア数学史』*5を出版した直後であり、それを下敷きにしたアルキメデスの『円の測定』、それにかかわるホイヘンスの『円の大きさの発見』の翻訳を彼女は研究テーマとして取り上げたのだろう。

Pearsonの論文は、おそらく自身でタイプしたため印字が一定でなく、また年月を経てかすれて読みにくい部分も多い。しかしその仕事は、誤字もなくまことに丁寧になされてあった。

このホイヘンスの『円の大きさの発見』のいくつかの特徴について、述べておきたい。

最初に気付くことは、17世紀前半に教育を受けたホイヘンスにとって、幾何学そして比例が数学の重要なツールであり、この証明でもまったく三角法は使われていない。1647年にホイヘンスがメルセンヌに手紙で書き送った“懸垂線”の証明でも、ユークリッド幾何学と力学で議論がなされていた。またこのとき、メルセンヌが若いホイヘンスを“新しいアルキメデス”と称賛したように、この『発見』においてもホイヘンスは忠実にアルキメデスの方法を用いている。

*5 A History of Greek Mathematics 2 vols. Oxford.1921

特にアルキメデスの『放物線の求積』[6]は、ホイヘンスの弓形とそれに内外接する三角形との大小関係を特定する方法のお手本となっていた。例えばアルキメデスは、 A, B, C, \dots, Z を公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列とすると、

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$$

と表されることを示し、有限級数において帰謬法により、放物線部分 $PQq = \frac{4}{3}\Delta PQq$ と定めている。

一方ホイヘンスは、アルキメデスの議論を踏襲する形で命題 III の円の弓形の求積で用いた。すなわち

$$\diamond ABCF + \frac{1}{4}\diamond ABCF + \frac{1}{4^2}\diamond ABCF + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF$$

この和にさらに最終項の $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF$ を加え、つぎのようこの和を求めている。

$$\diamond ABCF + \frac{1}{4}\diamond ABCF + \frac{1}{4^2}\diamond ABCF + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}\diamond ABCF = \frac{4}{3}\diamond ABCF$$

アルキメデスは、無限を避けるために帰謬法を用いたが、ホイヘンスは弓形の残り面積よりわずかに大きい微小な三角形 AFC を仮定して、弓形と内接三角形和との大小関係を導いている。

このような無限をあえて避けるように議論を進める方法は、彼の「懸垂線証明」においても同様であった。すなわち有限個の錘の吊るされた糸あるいは有限個の鎖の連結という形で懸垂線を考え、けっして17世紀後半で議論される一定の線密度をもつ糸の形としては考えてはいない。ホイヘンスは、無限や連続性を扱うことを避ける形で、厳密性を保証していた。

1650年代前半のホイヘンスの円積問題への研究は、17世紀後半の微積分法へ向かう無限小の議論とは異なる。彼のスタイルは、数学が幾何学から解析へと変化する時代にあって、厳密性を保つ有限の範囲の幾何学であった。そのようなホイヘンスの数学スタイルに対し、ニュートンは称賛を惜しまない。しかしそれは、ホイヘンスのライプニッツの微積分法の理解を困難にさせた短所でもあったのだろう。

今回、25歳のホイヘンスによるスネルの定理の証明を読み報告することができた。重心の議論など困難な部分もある習作的な数学論文であったかもしれない。しかしホイヘンスがその後果した彼の重要な役割を考えると、彼がどのように自らのスタイルを形成したのかを知る上でも重要である。ホイヘンスは彼の時代になした影響力の大きさと比べて、その業績の詳細はあまり知られていない。1923年に『発見』を翻訳した Pearson もそれを指摘し、“それは何かパズルのようだ”とコメントしていた。17世紀の数学の微積分法への発展を理解するためには、その準備に大きな足跡を残したホイヘンスは、そのキーとなる数学者であり、さらに調べていきたい。

[参考資料]

- [1] 『πの歴史』 ペートル・ベックマン ちくま学芸文庫 2006
- [2] 『円周率の歴史』 平山諦 大阪教育図書 1980
- [3] ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE. VIER ABHANDLUNGEN ÜBER DIE KREISMESSUNG Dr.F.RUDIO LEIBZIG 1892
- [4] The area of the circle by the method of Archimedes including a translation of "De circuli magnitudine inventa" by Christiaan Huygens Pearson, Hazel Boston Univ. OpenBU 1923 <http://hdl.handle.net/2144/5291>
- [5] Oeuvres complètes. Tome I. Correspondance 1638-1656 Christiaan Huygens http://www.dbnl.org/tekst/huyg003oeuv01_01/
- [6] 復刻 ギリシア数学史 T.L. ヒース (著) 平田寛, 菊池, 大沼 (訳) 共立出版 (1989)
- [7] Unrolling Time: Christiaan Huygens and the Mathematization of Nature: Joella G. Yoder Cambridge University Press (2004)
- [8] Huygens: The Man Behind the Principle: C. D. Andriess (著), Sally Miedema (訳) Cambridge University Press (2011)
- [9] Christian Huygens : E.A. Bell Nabu Press (First Edition 1947)