群上の不変積分の系譜：Hurwitz, Schur, Weyl, Haar, Neumann, Kakutani, Weil, Kakutani-Kodaira

平井　武 (Kyoto)

第 29 回数学史シンポジュウム 2018/10（於 津田塾大学）

群上の不変積分（不変測度）の歴史について,（私自身として）数学史的な考察を加えたのは齋藤正彦氏の訳本 [齋藤 2015] の「解説」を依頼されたのがきっかけでそれが最初である．この訳本の原典は名著 A. Weil *L'intégration dans les groupes topologiques et ses application* [Weil1940] であるが，私個人としては，本職の数学研究においてはこの本と，ほかに測度論の一般論を論じた本を勉強すれば，仕事をするには十分であった．そんなわけで，論文や著書では，Haar 測度という用語を頻繁に使いながらも，Haar の論文 [Haar1933] は読んだことがなかった．上で触れた「解説」を書くのにも，Haar 測度という名前の由来のこの原典は，Introduction を含めて十頁足らずを読んだだけだった．今回改めて，数学史的考察と大上段に振りかぶってはみたが，深掘りしていない「考察」であることをお断りいたします．ここでは，時系列に沿って並べられた文献を適当にグループ分けし，表題を付けて節 (section) を設け，その相互の関連も込めて内容を明らかにしていく，という形式で書き進めます．

1　Hurwitz による先駆的業績（Lie 群上の不変積分）

[Hur1897] A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **1897**, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp.71-90. [タイトル訳．積分による不変式の生成について]

回転群 $SO(n)$ に大域的座標を与え不変測度を具体的に書き下した．$U(n)$ でも同様．もうすこし内容に立ち入って紹介する．この 20 頁の論文では，1 頁強の序文があり，本文には節分けがない．その代わりに真ん中に短めの横線を引いただけの行が区切りとして入っている．これを節分けの区切りと認識すれば，4 節に分かれる．各節に内容から類推した適当なタイトルを補うと次の表になる（記号・用語は現代化した）．

序文,	p.71
§1. 連続群上の不変積分を用いた不変式の生成，とくに $SO(n)$ の場合	p.72
§2. 回転群 $SO(n)$ の広域的座標と不変測度の具体的表示	p.75
§3. ユニタリ群 $SU(n)$ の広域的座標と不変測度の具体的表示	p.80
§4. Lie 群の場合の一般論	p.86

序文.　有限群 G が変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に置換として働いているときには，任意の関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に $g \in G$ を働かせて，$g \in G$ に関して平均をとり，不変式

$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を得る.【現代の記法では $\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gf$.】 この手続きは無限変数のときにも使えることがある，の説明文のあとに，次の文章が来る：

> ⋯⋯ Ich habe nun den Gedanke verfolgt, dieses sich so zu sagen von selbst darbietende Verfahren zur Erzeugung der Invarianten auf die continuierlichen Gruppe zu übertragen, wo dann naturgemäß bestimmte Integrale an die Stelle der Summen treten. Dabei richtete ich mein Augenmerk zunächist auf die ganzen rationalen Invarianten der algebraischen Formen, also auf diejenigen ganzen rationalen Functionen der Coefficienten einer Form, die sich nicht ändern, wenn man auf die Variabeln der Form eine beliebige lineare, homogene, unimodulare Substitution ausübt. Die Untersuchung führte mich indessen bald dazu, ⋯⋯

（訳文 [概略]） これと同様な手続きを,「群上の和（平均)」の代わりに，自然に決まる「群上の積分」に置き換えることによって，自ずからなる様式として不変式の生成が出来るのではないかとの着想を追求する．初めの着眼は，整式の不変式であったが，次には線形変換が働く場合に拡がった．この研究はさらには，・・・・

（[序文の続き] の要旨） さらに進展した先には，$SL(n, \boldsymbol{R}), SL(n, \boldsymbol{C})$ またはその部分群による線形変換の場合があった．とくにここでは，回転群 $SO(n)$ の場合およびその複素版であるユニタリ群 $SU(n)$ の場合を取り扱う．

§1. 連続群上の不変積分を用いた不変式の生成，とくに $SO(n)$ の場合.

回転群 $G = SO(n)$ を例にとって，群上の不変積分の話をする．$h = (h_{\alpha,\beta}) \in G$ の行列要素 $h_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \boldsymbol{I}_n := \{1, 2, \ldots, n\})$ を使うと，

$$ds^2 := \sum_{\alpha,\beta\in \boldsymbol{I}_n} (dh_{\alpha\beta})^2 \tag{1.1}$$

は G 上の Riemann 計量を与える．これは見るからに G 不変である．

他方，一般に Riemann 空間 (M^m, ds^2) において，局所座標 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ に関して Riemann 計量を $ds^2 = \sum_{i,j\in \boldsymbol{I}_m} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j$ と書いたとき，volume 要素 $dv := \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, dx_1 dx_2 \cdots dx_m$ は M^m の等距離変換群に関して不変である（証明無しで説明してある）．この理論を利用すれば，$G = SO(n)$ 全体の上に広域座標を導入して，上記の G 上の metric ds^2 を使って，G 上の不変積分が書き下せるはず.

§2. 回転群 $SO(n)$ の広域的座標と不変測度の具体的表示

論文には詳しい証明は書いてなくて方針を示してあるので，Hurwitz の公式そのものを自分自身で証明することは（座標の入れ方の選択に個人の好みによる差が出てくるので）結構難しい．ここでは自己流で証明できる公式を **Hurwitz-Schur** の公式とよんで，ご披露する（原論文には，定理（Satz）とかの見出しは一切ないので，こちらで勝手に定理にまとめてある）．広域的座標は3次元回転群 $SO(3)$ の Euler 角の一般

化である．n 次元 Euclid 空間 E^n に直交座標 ${}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をとる（転置して縦ベクトルにしてある）．基本になるのは下式の，(x_i, x_j) 平面の回転 $r_{ij}(\phi)$, である：

$$r_{ij}(\phi): \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}, \quad x'_k = x_k \ (k \neq i, j). \tag{1.2}$$

$G_n := SO(n)$ 全体を被覆する Hurwitz-Schur の座標 $(\phi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j<n}$ を導入するには，まず $G_n \supset G_{n-1} \supset \cdots \supset G_3 \supset G_2$ という部分群の列をとり，各 G_j の回転 r_{j-1} を次のようにとって，列 $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_3, r_2$ を考える：

$$\begin{aligned} r_{n-1} &= r_{12}(\phi_{1,n-1})r_{23}(\phi_{2,n-1})\cdots\cdots r_{n-1,n}(\phi_{n-1,n-1}), \\ r_{n-2} &= r_{12}(\phi_{1,n-2})r_{23}(\phi_{2,n-2})\cdots r_{n-2,n-1}(\phi_{n-2,n-2}), \\ \cdots &= \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad , \\ \cdots &= \quad \cdots\cdots\cdots \quad , \\ r_3 &= r_{12}(\phi_{1,2})r_{23}(\phi_{2,2}), \\ r_2 &= r_{12}(\phi_{1,1}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

定理 1.1. 回転群 $SO(n)$ の一般元 h を次のように置く：

$$h = r_{n-1}r_{n-2}\cdots r_3 r_2. \tag{1.4}$$

いま，各 r_j $(2 \leq j \leq n-1)$ のパラメーター $\phi_{1,j}, \phi_{2,j}, \cdots, \phi_{j,j}$ が範囲

$$0 \leq \phi_{i,j} < \pi \ (1 \leq i < j), \quad 0 \leq \phi_{j,j} < 2\pi, \tag{1.5}$$

を動くとき，その像全体は $SO(n)$ を被覆する．さらに，次の制限条件を付加したときには，1 対 1 の対応になる：

$$\phi_{i,j} = 0 \ (\exists i > 1) \ \text{ならば} \ \phi_{k,j} = 0 \ (\forall k < i). \tag{1.6}$$

定理 1.2. 群 $SO(n)$ の上に (1.3) により Hurwitz-Schur の座標 $\phi := (\phi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ を入れる．座標の動く範囲は (1.5) である．群上の Riemann 計量としては上の (1.1) を入れる．この Riemann 計量に同伴した体積要素は回転不変で（定数倍を除いて）次に等しい：

$$dh = \prod_{1\leqslant r\leqslant s<n} (\sin\phi_{r,s})^{r-1}\, d\phi_{r,s}\,. \tag{1.7}$$

２つの定理の説明． 回転群の列 $G_n \supset G_{n-1} \supset \cdots \supset G_2$ で，隣接する $G_j \supset G_{j-1}$ の商をとると，$j-1$ 次元の球面 $S^{j-1} = G_j/G_{j-1}$ となり，球面の列 $S^{n-1} \supset S^{n-2} \supset \cdots \supset S^2 \supset S^1$ を得る．(1.3) の回転の列 $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2$ では，r_j は S^j に球面座標を与えるのに丁度いいように選んである．

Hurwitz による定理 1.2 の証明の方針は，「球面 S^j 上の回転不変な体積要素を r_j のパラメーター $(\phi_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j}$（すなわち，球面座標）で書きくだして，それを積み重ねれば，

群 G_n 上の不変積分の $h = r_{n-1}r_{n-2}\cdots r_2$ を使った具体的表示が得られる」というものである．細かい計算が書いてあるわけではないが，次のような感想を持った．

“論文では，外積代数も，もちろん記号 $dx_i \wedge dx_k \wedge \cdots$ も，表には出てこないが，Hurwitz は実質上は「外積代数の計算」を自在に使っていたのではないか．なぜなら，それ無しには与えられた答えにたどり着けないから．”

なお，論文では定理1.2での定数や，総体積 $\mathrm{vol}(G_n)$ も計算されている（のちに [Sch1905] で修正あり）．

§3. ユニタリ群 $SU(n)$ の広域的座標と不変測度の具体的表示

$SU(n)$ を n 次回転群の複素版としての説明があり，群上の Riemann 計量としては，$u = (u_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta\in \boldsymbol{I}_n} \in SU(n)$ に対して，

$$ds^2 = \sum\nolimits_{\alpha,\beta\in \boldsymbol{I}_n} du_{\alpha,\beta}\, d\overline{u_{\alpha\beta}} \tag{1.8}$$

をとる．基本単位は $SU(2)$ で，その一般元は下のように表される：

$$u = u_2(\varphi,\chi,\psi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi\, e^{i\psi} & -\sin\varphi\, e^{i\chi} \\ \sin\varphi\, e^{-i\chi} & \cos\varphi\, e^{-i\psi} \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

$$0 \le \varphi < \pi/2,\ 0 \le \psi < 2\pi,\ 0 \le \chi < 2\pi. \tag{1.10}$$

補題 1.3. 群 $SU(2)$ 上に，(1.9)–(1.10) により座標を入れると，群上の不変測度は（定数倍を除いて）下式で与えられる：

$$du = \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi\, d\chi. \tag{1.11}$$

一般の $SU(n)$ については，$SO(n)$ の場合と並行に議論するとして，座標の入れ方，不変測度の具体形（定数も決定），および，群全体の体積，を与えている．

§4. Lie 群の場合の一般論

一般の Lie 群 G に対して，局所座標を使って，volume 要素の不変性を論じている．Maurer-Cartan 形式 $d\omega = g^{-1}dg$ の理論ほど整理されてはいないが，それに近づくべき議論がされているはず．(詳細は省略)

2　Schur による「有限群の指標理論」の簡易化
（不変積分さえ認めればコンパクト群にも通用する理論）

[Sch1905] **[S7]** I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **1905**, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432.（タイトル訳．群指標の理論の新しい基礎付け）

Frobenius は世界ではじめて「有限群の表現論」を創始したときに 3 編の難しい論文 [F53,1896a], [F54,1896b], [F56,1897] を発表した．

第1論文は，群の**指標**（実は既約指標）$\chi(g)$ $(g \in G)$ を，“G 上の不変関数で，ある連立方程式系の解” として定義し，純代数的な取り扱いをした．さらに，計算例として，群 $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_5$, $PSL(2, \boldsymbol{Z}_p)$ p 奇素数，に対して，それらの指標をすべて具体的に与えた．

第2論文では，**群行列式**という $|G|$ 変数の多項式を定義し，それの因子分解を代数的に取り扱った．これは G の正則表現の既約分解を実行していることに当たる．

第3論文では，G の**線形表現** $G \ni g \to \pi(g)$ の概念をはじめて導入して，その指標を $\chi(g) = \mathrm{tr}\big(\pi(g)\big)$ として定義した．この新しい定義では既約指標だけではなく，その非負整係数の一次結合が現れる．折角，線形表現が定義として現れたが，ここでの議論は，第1，第2論文における代数的議論の結果を重用したので，難読なものとなった．(詳しくは本記事の第**11**節，さらには[研究所報26, 平井]を参照されたし.)

そこで，Frobenius の直弟子であった Schur のこの論文は，上記の「取っ付き難さ」「難解さ」を解消するために，概念導入の順序を組み立て直し，まずはじめに「線形表現」を登場させ，そこから「指標」や「既約分解」の話へとつなげていく，我々が馴染みのある形で，理論の簡易化と透明化を図った．この手法は有限群に限らず，より一般の群にも通用する．Schur 自身，この論文の冒頭の4行で次のように述べている：

> Die vorliegende Arbeit enthält eine durchaus elementare Einhürung in die von Hrn. Frobenius begründete Theorie der Gruppencharactere, die auch als die Lehre von der Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare homogene Substitutionen bezeichnet werden kann.

（意訳）この論文は，Frobenius が基礎づけた「群指標」の理論の徹底的に簡易化された導入と，それと並んで，線形表現への手引き，とを含む．

論文内容のもっとも重要な部分は既約な線形表現の行列要素と指標に関するいわゆる**直交関係**である．有限群 G の上の関数 f に対する「平均」を積分記号で書く：

$$\int_G f(g)\, dg := \frac{1}{|G|}\sum\nolimits_{g\in G} f(g). \tag{2.1}$$

記号等は全部現代化して数学的内容を述べることにする（原論文の時代的背景，もしくは古色，が失われれてしまうのは申し訳ないが，ここは，本記事全体の流れの主流ではないので効率を考えての処置ゆえお許し頂きたい）．G 上の複素数値関数の空間 $C(G)$ に，次のように正定値内積を入れる：$f_1, f_2 \in C(G)$ に対して，

$$\langle f_1, f_2\rangle := \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}\, dg. \tag{2.2}$$

他方，π を複素ベクトル空間 $V(\pi)$ 上の G の線形表現とし，$d_\pi := \dim \pi$ とおく．

定理 2.1. (i) $\pi(g)$ $(g \in G)$ がユニタリになる正定値内積が $V(\pi)$ に導入できる．

(ii) $V(\pi)$ に正規直交基底をとり，$\pi(g) = \big(t^{\pi}_{\alpha\beta}(g)\big)_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant d_\pi}$ とユニタリ行列で表す（$t^{\pi}_{\alpha\beta}$ は行列要素）．π を既約と仮定し，別の既約表現 ρ をとる．このとき，

$$\langle t^{\pi}_{\alpha\beta}, t^{\pi}_{\gamma\delta}\rangle = \tfrac{1}{d_\pi}\,\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\delta} \quad (\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \boldsymbol{I}_{d_\pi}). \tag{2.3}$$

$$\rho \not\cong \pi \text{ のとき,} \qquad \langle t^{\pi}_{\alpha\beta}, t^{\rho}_{\gamma\delta}\rangle = 0 \quad (\forall\, \alpha,\beta,\gamma,\delta). \tag{2.4}$$

(iii) 既約表現 π の指標を $\chi_\pi(g) := \mathrm{tr}\big(\pi(g)\big)$ $(g \in G)$ とおく．これは G 上の不変関数である（内部自己同型で不変）．ρ を別の既約表現で $\rho \not\cong \pi$ とする．このとき，

$$\|\chi_\pi\|^2 = \langle \chi_\pi, \chi_\pi\rangle = 1, \qquad \langle \chi_\pi, \chi_\rho\rangle = 0 \ \text{ i.e.,}\ \chi_\pi \perp \chi_\rho\,. \tag{2.5}$$ □

上の主張 (iii) を言い直すと，既約指標全体の集合は,（有限次元）Hilbert 空間 $L^2(G)$ の「不変関数よりなる部分空間」$L^2(G)^0$ の正規直交基底を与えている．

なお，定理内の各命題の，Schur による証明方法は，G がコンパクト群の場合にも，「有限群上の平均」$\int_G \cdot\, dg$ を「不変測度 dg に関する積分」$\int_G \cdot\, dg$ に置き換えれば，そのまま通用する (私も最近になってこれを知ったときには感動した) が，これはすごいことで，次節の Schur, Weyl の仕事やそのほかに対する大きな影響を与えている．

3 Schur の n 次回転群の既約表現の分類（不変積分の応用）と Weyl によるその拡張（速報として）

[Sch1924a] [S51] I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. der Wiss. zu Berlin **1924**, Physikalisch-Marhematische Klasse, pp.189-208.（タイトル訳．不変式論の問題に対する，積分計算の新しい応用，I. 報告要旨）

1897 年の Hurwitz の Lie 群上の不変積分の論文から 27 年経って，ようやくその応用が現れたのが，この論文である．内容は，不変式論に群上の不変積分を用いる手法の一般論と，Hurwitz の $SO(n)$ に対する広域座標と不変積分に関する結果を引用（少し修正）して，n 次回転群の既約表現の分類を得るための概論である．それは，行列要素の直交関係（定理 2.1）を $SO(n)$ に拡張して，それにより既約指標を決める，という手順で実行される．論文は，1 頁半の序文と第 I 部（§§1–3），第 II 部（§§4–9）からなる．内容を伺うために目次をリストアップすると，

Erster Teil. Projektive Invarianten.
§1. Ein Hilfssatz über unitäre Substitutionen.
§2. Der Integrationsprozeß zur Erzeugung projektiver Invarianten.
§3. Beziehungen zum Ω-Prozeß.
Zweiter Teil. Die Homomorphismen der Drehungsgruppe und das Abzählungsproblem für Orthogonalinvarianten.
§4. Der HURWITZsche Integralkalkül.
§5. Einige Eigenshaften der Homomorphismen der Gruppe $\mathcal{D}$. （注．$\mathcal{D} = SO(n)$）

§6. Die Grundrelationen für die einfachen Charakteristiken.
§7. Das Abzählungsproblem für Orthogonalinvarianten.
§8. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.
§9. Beliebige orthogonale Transformationen.

序文の最終段落の頭から引用すると，

> Im Falle der Orthogonalinvarianten sheint der HURWITZsche Integrationsprozeß keine ähnliche Umgestaltung zuzulassen. Ich zeige aber, daß gerade in diesem Falle der von HURWITZ entwickelte Kalkül noch andere wichtige Anwendungen gestattet. Insbesondere liefert er eine elegante Lösung des " Abzählungsprobelm", nähmlich der Aufgabe, die genaue Anzahl der zu $f(a, x)$ gehörenden linear unhabhängigen Orthogonalinvarianten von vorgegebenem Grade r zu bestimen. ·········

（意訳） 直交群不変式の場合にはHurwitzの積分プロセスの同様の改造は許されないようだ．しかし私は丁度この場合には，Hurwitzが展開した積分計算が，ほかの重要な応用を許すことを示した．とくに「数え上げ問題」に対してエレガントな解をもたらす．これは，決められた次数rの，($f(a, x)$に対応する）線形独立な回転群不変式の正確な個数を決定する問題である．

[Sch1924b] **[S52]** I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen, ibid., pp.297-321. （タイトル訳. —, II. 線形変換による回転群の表現について）

実際に，回転群$SO(n)$の既約表現の分類に成功．指標の理論が決定的な役割をする．内容の紹介として，目次をリストアップしておこう： 2頁半の序文の後，

§1. Allgemeine Vorbemerkungen.
§2. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$.
§3. Eine Hilfsbetrachtung.
§4. Die einfachen Charakteristiken der Gruppe $\mathcal{D}'$. （注. $\mathcal{D}' = O(n)$, $\mathcal{D} = SO(n)$)
§5. Fortsettung und Schluß des Beweises.
§6. Folgerungen aus dem Satze IV.

ここでは，序文の一部（第3段落より）を引用するにとどめて内容の詳細は省略：

> Mein Hauptergebnis lautet: Alle stetigen Homomorphismen[1] der Gruppen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$ lassen sich allein unter Benutzung ganzer rationaler Funktionen herstellen. Um eine Übersicht über die Gesamtheit der irreduziblen Gruppen linearer homogener Substitutionen[2] zu gewinnen, die der Gruppe $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{D}'$ homomorphe sind, verfahre man forgendermaßen. Bedeutet ν

---
1) 脚注 3) を見よ
2) 脚注 3) を見よ

die zahl $[n/2]$ so bilde man für jedes System von ν nicht negativen ganzen Zahlen

(1) $$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu$$

$\cdots\cdots$ （以下ややこしいので省略して日本語で説明）

（和訳）私の主要結果は次のように言える：$\mathcal{D} = SO(n)$ と $\mathcal{D}' = O(n)$ に対して，すべての連続な線形表現[3]は，整関数だけを利用して作り出せる．$\mathcal{D}$ もしくは $\mathcal{D}'$ の既約線形表現全体の概要を得ようとすると，次のようにやる．まず，$\nu := [n/2]$ とおき，ν 個の非負整数の系

(1) $$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu$$

を使う．[以下の説明に続く]

(説明) $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ は $\mathcal{D}'$ や，その位数 2 の正規部分群である $\mathcal{D} = SO(n)$ の既約表現を分類するための，いわゆる**最高ウェイト**であり，n の偶奇によって様子が違うので，その説明が（本段落を込めて 4 つの段落で）31 行ほど続く．

引き続く次の段落の頭を引用すると，

> Bei dem Beweis der hier erwähnten Sätze benutze ich die auf dem HURWITZschen Integralkalkül beruhenden analytischen Methoden, die ich in A.I (=第 I 論文) entwickelt habe. Es handelt sich in erster Linie darum, gewisse Integrale mit wohlbestimmten Integranden genau zu berechnen. $\cdots\cdots$

（訳）ここに挙げられている定理たちを証明するには，第 I 論文で論じた Hurwitz の不変積分に基づく解析的方法を使う必要がある．そこではまず第一に，特定の被積分関数について精密な計算をせねばならない．

（要は，既約指標を，定理 2.1 (iii) を使えるようにして，具体的計算で求める．）

序文の最終段落では É. Cartan の 2 編の論文[4]との関係について，さらに研究すべきである，との言及がある．

［平井注］$SO(n)$ $(n \geq 3)$ は普遍被覆群 $\mathrm{Spin}(n)$（2 重被覆）を持つので，$SO(n)$ から見て 2 価の表現がある．これを**スピン表現**とよび，それらに対応する最高ウェイト $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ は，すべての α_j が半整数（奇数/2）である．Schur が本論文で分

[3] この時期の Schur の用語では，群 G の線形表現（π とする）とそれによる像の群 $\pi(G)$ とを対等に置いているので注意が必要である．脚注 [1] での用語 Homomorphism は「線形表現」と意訳するのが適当である．[2] での用語 ‘Gruppen linearer homogener Substitutionen’（意訳すると「斉次線形変換により写した群」）は，関係代名詞 die で受けて ‘$\mathcal{D}$ もしくは $\mathcal{D}'$ と準同型’ と言っているので，$G = \mathcal{D}, \mathcal{D}'$ の π による像 $\pi(G)$ のことを意味するが，これも「線形表現 π」と意訳して理解するのが適当である．

[4] E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull de la Soc. Math. de France, **41**(1913), 53–96 (複素単純 Lie 環の既約表現の分類). —, Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Journ. de Math., Série 6, **10**(1914), 149–186 (実単純 Lie 環の既約表現の分類).

類したのは，α_j がすべて整数なので，1価の既約表現（非スピン）である．Lie 環の既約表現の分類から見ると，スピン・非スピンに大きな差異は無いので，Cartan は両者を一緒に分類している．しかし，普遍被覆群 Spin(n) などが良く分かっていなかった時代のことである．

[Wey1924] **[W61]** H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur), ibid., pp.338-345. （訳．単純連続群の表現の理論について）

Schur から親切にも上記2編の未刊の原稿の写しを貰って，その手法の核心が「群上の不変関数の不変積分」にあることを見抜いた．Cartan 部分群上のいわゆる「Weyl の積分公式」を与え，それを使えば古典群 $SU(n), SO(n), Sp(2n)$ の既約表現の分類が出来ることを概説し速報した．この速報は，Schur の特段の好意によって，Schur 自身の一連の論文 I, II, III の途中に挿入されるよう，学士院会員だった Schur が学士院紀要に紹介し手配した．

[Sch1924c] **[S53]** I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen, ibid., pp.346-355.

序文では，Study による回転群の不変式論，上記の論文での Hurwitz 積分を不変関数に対して書いたときの「Weyl の積分公式」への言及がある．目次を掲げると

§1. Einige Hilfsformeln.
§2. Der vereinfachte Integralkalkül.
§3. Der Abzälungskalkül für Orthogonalinvarianten.
§4. Über die reellen Darstellungen der Gruppe $\mathcal{D}$.

（なお，Schur と Weyl とのやりとりの機微も込めて，この一群の論文については，詳しくは [研究所報 38, 平井] を見られよ.）

4 Weyl の複素単純群の（有限次元）既約表現の分類，ユニタリ化 (unitarian trick) の理論

[Wey1925-26] **[W68]** H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag, Math. Zeit., **23**(1925), 271-309; **24**(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

上の概説論文 [Wey1924]=[W61] で速報として報告した手法で，実際に既約表現の分類を実行した．コンパクト古典群に対する既約表現の分類結果から，複素古典群の有限次元既約表現の分類結果を導いた (Weyl の unitarian trick)．合わせて4編の力作であるが，Weyl が古典群を越えて，一般の単純かつ半単純な Lie 群についても，結果を

主張している部分もあり，そこでは，例えば，例外群において，コンパクト実形について，その基本群がよく分かっていない段階なので，普遍被覆群と複素形との間の関係がはっきりせず，unitarian trick の適用に穴があった，ということもあった．

（余談）それに付けても思い出すのは，私が Weyl 著の「古典群」を学習した折の感想で，「不変関数の Weyl の積分公式」のいわゆる‘幾何学的証明’を心底から理解しようとして苦労した経験である．それについて，ほかの人たちは苦労しなくてもこの‘幾何学的証明’が納得できたのだろうか，とずっと心に引っかかっていたのだが，あるとき，Élie Cartan の業績を論じた Chern-Chevalley の論説[1]を読んでいて，次のような文章を見付けて，自分ひとりで何となくほくそ笑んだ．記事の中で，1925 年あたりでの Cartan の仕事と，Weyl の古典群の表現論 [W68] との比較を論じた部分 (p.226) の冒頭 (lines 6–9) には次のように書かれている：

“…… Whereas Weyl's line of attack was, if we may say so, brutally global, depending essentially on the method of integration on the whole group, the work of Cartan puts the emphasis on the connection between the local and the global. …… ”
（ここでの Chern-Chevalley の用語‘brutally’は，話の流れからすると，むしろ褒め言葉とも受け取れるが.）

5 Peter-Weylの定理（コンパクト群の既約表現の完全性），（付加．同じ手法が使われている概周期関数の理論）

[PeWy1927] **[W73]** P. Peter und H. Weyl, Die vollstšandichkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenene kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., **97** (1927), 737-755.

Lie 群に対しては不変測度の存在が分かっている段階だが，Lie 群 $\mathfrak{G}$ がコンパクトならば，「有限次元既約ユニタリ表現全部が構成できて，$L^2(\mathfrak{G})$ 上の正則表現が既約分解できる」，あるいは「有限次元既約ユニタリ表現全体の集合が完備である」，といういわゆる「Peter-Weyl の定理」を証明した．目次をリストアップすると，

[1] [CC] S.-S. Chern and C. Chevalley, *É. Cartan and his mathematical work,* Bull. Amer. Math. Soc., **58**(1952), 217-250.

§1 の初頭から引用すると，

> **1.** *Gruppe. Volummessung in der Gruppenmannigfaltigkeit.* Es handelt sich im folgenden um die *Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe durch homogene lineare Transformationen* oder Matrizes. Innerhalb der gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeute $\circ$ das Einheitselement. Um der Möglichkeit einer invarianten Volummessung willen werde vorausgesetzt, daß Lies infinitesimale Begriffsbildungen auf die Gruppe $\mathfrak{G}$ anwendbar sind. Es sollen also die zu $\circ$ unendlich benachbarten, die infinitesimalen Elemente von $\mathfrak{G}$, eine lineare, etwa r-parametrige Schar bilden. Zu einem Element a von $\mathfrak{G}$ gehört die durch die Formel $s' = sa$ definierte Abbildung $s \to s'$ von $\mathfrak{G}$ auf sich selbst. Bezeichnen wir sie als (rechtsseitige) *Translation*, so ist das Volummaß auf $\mathfrak{G}$ durch die Forderung bestimmt, daß das Volumen den Tranlationen gegenüber invariant sein soll. …….

（意訳）**1. 群. 群多様体上の体積 (Volume) 計量.** 以下では，閉な（すなわち，コンパクトな）連続群の斉次線形作用素，もしくは行列，による表現を取り扱う．与えられた群 $\mathfrak{G}$ の単位元を $\circ$ で表す．不変な体積計量導入の可能性のために，Lie の無限小変換の概念が使えることを仮定する．そうすると，単位元 $\circ$ に無限小で近い，$\mathfrak{G}$ の無限小な元は，ある r 次元の「固まり」をつくる．$a \in \mathfrak{G}$ に対し，写像 $\mathfrak{G} \ni s \to s' = sa \in \mathfrak{G}$ を右移動という．$\mathfrak{G}$ 上の体積計量は，この移動に関して不変であることが要求される．……

[自論文の引用] §2 の終わりの 5 行にわたって，自論文 [W72]（下記）を，「概周期関数における，allgemeinere Bohrsche Vollständigkeitsrelation の証明」との共通点に関して，引用している．また，§6 の最終段落（12 行）では，大作 [W68]（上記 **4.** 参照）との関連について述べられている．

（付加） **[Wey1927] [W72]** H. Weyl, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann., **97** (1927), 338-356.

上の論文 [W73] とこの [W72] は，主要結果の証明部分のキーポイントが共通であるとして，相互に文中で引用しあっている．そのポイントとは，群上の（連続核を持つ）積分作用素のコンパクト性に関することである．p.348, lines 4–9 を引用すると，

> Der hier zur Gewinnung des Fundamentalsatzes im Gebiet des fastperiodischen Funktionen beschrittene Weg steht in einer Beziehung zum Vollständigkeitsbeweis für das System der primitiven *Charakteristiken einer kontinuierlichen Gruppe.* Man vergleiche darüber eine demnächst in den Mathematischen Annnalen erscheinde Arbeit von F. Peter und H. Weyl, in welcher jener Beweis allgemein erbracht wird.

6　待たれていた「群上の不変測度の一般論」(Haar)

[Haar1933] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., **34** (1933), 147–169.

(Übersetzung einer der Sitzungen der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 18 April 1932). [1932/04/18 のハンガリー学士院記事（ハンガリー語）の忠実なドイツ語訳]

Introduction では，上で論じた Hurwitz, Schur, Weyl を引用している．主結果は，

定理 6.1.（Lie 群とは限らない）局所コンパクト群が，**距離付け可能かつ可分**であれば，右移動（または左移動）で不変な外測度が存在する．□

序文を頭から引用すると，

> 1. Der Ausgangpunkt der Lieschen Theoie der kontinuierlichen Gruppen, die sog. Infinitesimaltransformation, wird bekanntlich mittels eines Differentiationsprozesses gewonnen; deshalb ist die Liesche Theorie in ihrer ursprünglichen Form nur auf solche Gruppen anwendbar, welche durch solche Gleihungen dargestellt sind, die die fraglichen Differentiationsbedingungen erfüllen. Dieser Theorie steht eine andere gegenüber, die von Hurwitz in einer berühmten Arbeit angebahnt wurde, welche man treffend als eine Integrationstheorie der kontinuierlichen Gruppen bezeichnet hat; diese Theorie wurde insbesondere im letzten Jahrzehnt durch eine Reihe von wichtigen Arbeiten gefördert, von denen wir hier nur die schönen Arbeiten von Schur und Weyl erwähnen.
>
> Es liegt daher der Gedanke nahe, die Frage zu untersuchen, ob man ····(中略)····. Diese Frage ist offenbar damit gleiwertig, ob man *in der Gruppenmannigfaltigkeit einen Inhalts- bez. Maßbegriff einführen kann, der invariant gegenüber den Transformationen der Gruppe ist*, d. h. der ······
>
> （2 行余省略）　Unsere Untersuchungen gelten sogar für noch allgemeinere kontinuierliche Gruppen; wir werden im wesentlichen nur annehemn daß die *Gruppenmannigfaltigkeit metrisch, separabel und im Kleinen kompakt ist.* ······

（意訳）連続群，いわゆる無限小変換，の Lie 理論の出発点は，よく知られているように，微分プロセスから得られている．それゆえ，Lie 理論は本来の形では，当の微分条件を満たすような方程式で表される群にのみ応用できる．これらの理論には，向かい合わせの別の面として，Hurwitz が有名な仕事[1]で道を開いた「連続群上の積分理論」がある．その理論は，ここ十年ほどで一連の重要な仕事が続いているが，ここで言及するのは，美しい Schur や Weyl の仕事だけにとどめる．

---

[1] Göttinger Nachrichten, 1897, S.71–90.

したがって，すぐに思いつく問題として，···（中略）····．この問題は明らかに次の問いに同値である：「群多様体の上に，群変換に対して不変な‘容量概念’(Inhaltsbegriff) もしくは‘計量概念（Maßbegriff）を導入できるか」，······

（省略）　我々の研究は，それどころかもっと一般的で，実質上，次のことしか仮定しない：「群多様体は，距離付け可能，可分で，局所コンパクト」．

目次をリストアップすると，

なお，§4 の応用には，第 3 項目として次の項目がある：

> **15.** Ist die Gruppenmannigfaltigkeit 𝔊 kompakt, so kann mann ohne Schwierigkeiten die shöne Theorie von F. Peter und H. Weyl[2)] über die Darstellung der geschlossenen Lieschen Gruppen auf den vorliegenden Fall übertragen, da in diesen Untersuchungen lediglich nur der invariante Integrationsprozeß benutzt wird. Um dies kurz anzudeuten, ······ .

（説明）不変測度の応用として，「Peter-Weyl がコンパクト Lie 群に与えた理論は，一般のコンパクト群（不変測度を持つ場合）に対して成り立つ」ことを論じている．証明のキーとなる命題は，（その表現形式はいろいろ違っていても）結局は，現代的表現で言えば，次と同等である：

命題．コンパクト群上の連続核をもつ積分作用素はコンパクトである．[3)]

7　Haar 測度の一意性定理の 2 種類の証明（Neumann）

[Neum1935] J. von Neumann, Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Comp. Math., **1**(1935), 106-114.

定理 7.1. コンパクト群上のいわゆる Haar 測度が（定数倍を除いて）一意的である．

内容が類推できるように，論文の項目 **1.** の一部を引用する：

> **1.** G sei eine topologische Gruppe, d.h. ···············
> ············（12 行省略）············

[2)] Mathmatische Annalen, Bd. 97, S.737–755.

[3)] **定義．** Hilbert 空間上の線形変換がコンパクトであるとは，有界集合を相対コンパクト集合に写す，ということ．

A. Haar bewies, daß in jedem im kleinen kompakten G ein Maßbegriff definiert werden kann, der alle formalen Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes besitzt, und gegenüber jeder Abbildung $x \to x \cdot a$ invariant ist. Dabei kann das Maß von ganz G durchaus unentlich sein, aber es gilt: Jedes Maß ist $\geqq 0$, jedes Maß einer offenen (nicht-leeren) Menge ist > 0, jedes Maß einer kompakten Menge ist endlich.

Ein solches Maß nennen wir ein Haarsches rechts-invariantes Maß. ······
······(9行省略)······

Wir werden nähmlich für kompakte G eine neue Methode angeben, ein Haarsches rechts-invariantes Maß aufzustellen — das übrigens in diesem Falle von selbst auch links-invariant sein wird, ja auch gegenüber der Abbildung $x \to x^{-1}$. Unsere Methode ist von der Haarschen wesentlich verschieden und vielleicht auch an und für sich nicht uninteressant; sie ergibt für kompakte G das Endresultat rascher, und so daß die oben erwähnte Eindeutigkeit von selbst mit herauskommt. ···(以下略)···.

[Neum1936] J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Mat. Sbornik, **1(43)** (1936), 721-734.

定理 7.2. コンパクトではない局所コンパクト群が第２加算公理（開集合族系に可算基がある）を満たすとき，Haar 測度は一意的である．

8 証明の簡易化・透明化と定理の拡張（角谷先生）

[角谷 1936] S. Kakutani, Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan, **12**(1936), 82-84.

Haar の論文 [Haar1933] では，局所コンパクト群に，可分性とともに**距離付け可能性**が仮定されていた．後者の仮定については，「**第２可算**（開集合族系に可算基がある）ならば（左不変距離による）距離付け可能」を証明するのは難しくはないが，角谷先生は次の定理を証明された：

定理 8.1. **第１位可算公理を満たす位相群には，左移動（もしくは右移動）で不変な距離が入る．**

ここに，第１位可算公理とは「各点の近傍系がそれぞれ可算基を持つ」という公理である．証明の議論は巧妙ですばらしい．

[角谷 1938] S. Kakutani, On the uniqueness of Haar's measure, Proc. Imp. Acad. Japan, **14**(1938), 27-31.

角谷先生は，上の Neumann の 2 編の論文を越えて，均質空間上の不変測度を込めて，簡単化した統一的な議論で，Haar 測度の一意性を示した．

論文トップから引用すると，

> **1.** For a topological group G, which is locally compact and separable, the uniqueness of Haar's left-invariant measure is proved by J. v. Neumann.[1] Although the method used by him is very interesting and powerful, his proof is somewhat long. The notion of right-zero-invariance is not necessary for the proof. In this paper we shall give a simplified proof. The essential inprovement consists in the adoption of the *right*-invariant measure in the second group, in constructing the measure of the topological product $G \times G$. Since the separability plays no essential rôll in our proof, it can slso be, by slight modifications, applied to the case of a non-separable group (the case of a locally bicompact topological group, which is treated by A. Weil[2]), and moreover we can prove, in the same manner, the theorem of the uniqueness of Haar's measure even for the case, when the field G is no longer a topological group, that is, G is simply a topological space S, and when the transitive group G of homeomorphic transformations of S on itself is given.[3]

主要結果．
群 G を局所コンパクトとする（加算公理は仮定しない）．G が位相空間 S 上に同相的（homeomorphic）かつ推移的に作用しているとする．Borel 集合族上で定義され，相対コンパクトな Borel 集合に対して有限値をとる測度 μ を考える．

定理 8.2（一意性）． S 上の測度 μ で，G 不変なものは（定数倍を除いて）一意的である．

9　群上の不変測度理論の決定版（Weil の著書）

[Wei1940] A. Weil, *L'integration dans les groupes topologiques et ses application,* Hermann, 1940 (1st ver.), 1964 (2nd ver.), Hermann.

本書の第 2 章（§§6 〜 9）が Haar 測度を取り扱う．

§6.「測度と積分」において，Radon 測度が説明されている．位相空間 X が局所コンパクトであるとき，X のコンパクト部分集合全体の集合から生成される σ 加法族を $\mathfrak{M}_c(X)$ とすると，$\mathfrak{M}_c(X)$ 上で定義される測度を **Radon** 測度という．Radon 測度は

[1] J. v. Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Recuel Math., **1** (**43**) (1936).
[2] Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés, C.R. **202** (1936).
[3] Cf. J. v. Neumann, on the uniqueness of invarant Lebesgue measure, Bull. Amer. Math. Soc., **42** (1936) (Abstract).

コンパクト台付き実数値連続写像全体の成す関数空間 $C_c(X)$ 上の線型汎関数の言葉でも定義することができる．それはBourbakiのやり方である．(実は，WeilはBourbakiグループの創立者たちの中心人物であった.) $C_c(X)$ 上の実数値汎関数 φ が正であるとは，$f \in C_c(X)$, $f \geq 0$, に対して，$\varphi(f) \geq 0$, となることである．このとき，基本となる命題は次である：

命題. $C_c(X)$ 上の正なる実汎関数 φ に対し，$\mathfrak{M}_c(X)$ 上の測度 μ が一意的に存在して，

$$\varphi(f) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \quad (f \in C_c(X)), \tag{9.1}$$

となる．逆に，μ を $\mathfrak{M}_c(X)$ 上の測度とすると，積分 (9.1) により，$C_c(X)$ 上の正の汎関数 φ を得る． □

X を局所コンパクト群 G とする．関数 $f \in C_c(G)$ に群上の左移動 $g \to sg$ を働かせると，$(L_s f)(g) := f(s^{-1}g)$ $(g \in G)$ となる．$C_c(G)$ 上の汎関数 φ が左不変であるのは $\varphi(L_s f) = \varphi(f)$ $(\forall f, s \in G)$ のとき．Weilは§7で，左不変な φ の存在を証明した．

注. Weilの注意によると,「コンパクト空間の直積はコンパクトである」(Tychonoffの定理）という形で，E. Zermeloの選択公理が使われている，とのことである．

定理 9.1. 群 G を局所コンパクトとする（加算公理は仮定しない）．G 上には，左不変なRadon測度が（定数倍を除いて）一意的に存在する．

なお，本書第5章「コンパクト群の理論」(§§20～25）では，Peter-Weylの理論が，コンパクト群一般に対して完成された形で与えられている．

（注）名文で知られるこの本の訳書が待たれながらもながらく出版されなかったが，ようやく出版された．

[齋藤 2015] 齋藤正彦訳， A. Weil 著「位相群上の積分とその応用」(平井武 解説)，ちくま学芸文庫，2015.

10 Borel測度とBaire測度の同等性（角谷-小平）

[角谷小平 1944] S. Kakutani - K. Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, Proc. Imp. Acad. Japan, **40**(1944), 444-450.

論文のトップを引用すると，

> Zur Definition der Haarschen Masses m in einer lokal bikompakten, nicht separablen Gruppe gibt es zwei Möglichkeiten. Nach der ersten gewöhlichen Definition wird m zunächst für alle Borelschen Mengen erklärt und dann zum vollständigen Mass vervollständigt; nach der zweiten wird

dagegen m zunächst nur für die Mengen mit Baireschen charakteristischen Funktionen — wir wollen solche Menge Bairesch nennen — definiert und dann vervollständigt. Sind nun diese zwei Definitionen äquivalent ? In der vorliegenden Note soll diese Frage bejahend beantworted werden. Dabei ……

（説明）可分でない局所コンパクト群に，Haar 測度 m を完備な測度として入れるときに，２つのやり方がある．第１の方法は，まず Borel 集合族に測度を入れて，そのあとそれを完備化するやり方．第２の方法は，Baire 集合族に測度を入れて，そのあと完備化する．

問題の群を G とし，定義として，G 上の **Baire 関数族** $\mathcal{B}(G)$ とは，実数値連続関数全体 $C(G)$ を，「関数列 $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, に対して各点収束極限 $\lim_{n\to\infty} f_n$ をとるという操作」に関して，閉じさせたものである．$\mathcal{B}(G)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の単位元 1 を持つ関数環である．部分集合 $A \subset G$ が **Baire 集合**であるとは，その特性関数 χ_A が Baire 関数であること．

この論文の主要結果は，次の定理である：

定理 10.1. 上記の第１の方法と第２の方法は同等である（おなじ完備測度を与える）.

11　参考：（有限）群の表現論の起源となる３論文

[F53,1896a] F.G. Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **1896**, pp.985–1021.

[F54,1896b] —, Über die Primfactoren der Gruppendeterminante, ibid., pp.1343–1382.

[F56,1897] —, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akad. der Wissen. zu Berlin **1897**, pp.944–1015.

第１論文は，有限群 G の**指標** f とは，類関数であって，ある（具体的に与えられた）連立線形方程式を満たすものであると定義し，指標全体の次元と線形独立な基本解を具体的に与えた．全体として代数的であり結構読み砕くのに苦労する．

第２論文では，各 $g \in G$ に独立変数 x_g をあてがって，$G \times G$ の添数を持つ行列 $(x_{gh^{-1}})_{g,h\in G}$ を作る．その行列式（$|G|$ 個の独立変数の多項式）を**群行列式**とよぶ．この論文では，群行列式の既約因子分解が純代数的に論じられる．

それは，現代風に言えば，次のようになる．「$\ell^2(G)$ 上の $g \in G$ の作用（正則表現）を添字が $G \times G$ である行列で表したものを**群行列**ということにすると，その既約分解を純代数的に論じている．」この論文も難解である．

第３論文では，§2 で群の線形表現が定義されてはじめて姿を現している．そのあと §4 で「指標」の「線形表現 π を使った定義」 $\chi_\pi(g) = \mathrm{tr}(\pi(g))$ が現れる．しかし，第

1論文での「指標」は既約表現の指標（既約指標）に限られている．これは代数的に「指標」を定義したことによる限界である．いずれにせよ，第3論文での議論はその多くが「群行列式の単純因子への分解」を元にしているので，先行する第1，第2論文での結果に多くを負っている．従って，内容は，いまだ「線形表現をもとにした指標理論」への過渡期にある．

まとめると，3論文合わせての全体の理論の組み立てとしては，導入の順序が「(既約）指標」,「群行列式」,「線形表現」と来るので，とても取っつきにくい．それを現代風に，まず「線形表現」，そのあとで「指標」という順序に組み直して簡易化したのが [Schur1905] であった．

参考文献

[Hur1897] A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **1897**, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp.71-90.

[Sch1905] **[S7]** I. Schur, Neue Begründung der Theorie der Gruppencharactere, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften **1905**, Physikalisch-Mathematische Klasse, pp.406–432.
【§2 に **Schur の補題** あり】

[Sch1924a] **[S51]** I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie I. Mitteilung, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin **1924**, Physikalisch-Marhematische Klasse, pp.189-208.

[Sch1924b] **[S52]** I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie II. Über die Darstellung der Drehungsgruppe durch lineare homogene Substitutionen, ibid., pp.297-321.

[Wey1924] **[W61]** H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen (Aus einem Schreiben an Herrn I. Schur), ibid., pp.338-345.

[Sch1924c] **[S53]** I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie III. Vereinfachung des Integralkalküls. Realitätsfragen, ibid., pp.346-355.

[Wey1925-26] **[W68]** H. Weyl, Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen durch lineare Transformationen, I, II, III und Nachtrag, Math. Zeit., **23**(1925), 271-309; **24**(1926), 328-376, 377-395, 789-791.

[Wey1927] **[W72]** H. Weyl, Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen, Math. Ann., **97** (1927), 338-356.

[PeWy1927] **[W73]** P. Peter und H. Weyl, Die vollstšandichkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenene kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., **97** (1927), 737-755.

[Haar1933] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., **34** (1933), 147–169. (Faithful translation from Sitzung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 18 April 1932)

[Neum1935] J. von Neumann, Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Comp. Math., **1**(1935), 106-114.

[Neum1936] J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Mat. Sbornik, **1(43)**(1936), 721-734.

[角谷 1936] S. Kakutani, Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan, **12**(1936), 82-84.

[角谷 1938] S. Kakutani, On the uniqueness of Haar's measure, Proc. Imp. Acad. Japan, **14**(1938), 27-31.

[Wei1940] A. Weil, *L'integration dans les groupes topologiques et ses application,* Hermann, 1940 (1st ver.), 1964 (2nd ver.), Hermann.

[角谷小平 1944] S. Kakutani - K. Kodaira, Über das Haarsche Mass in der lokal bikompakten Gruppe, Proc. Imp. Acad. Japan, **40**(1944), 444-450.

[齋藤 2015] 齋藤正彦訳, A. Weil 著「位相群上の積分とその応用」(平井武 解説), ちくま学芸文庫, 2015.

[研究所報 xx] 津田塾大学数学・計算機科学研究所報 xx 号, http://www2.tsuda.ac.jp/suukeiken/math/suugakushi/