楕円曲線と整級数算術幾何平均について

by 難波完爾

463-3 Kitamizote Sojya Okayama 717-1117

Tel/fax. 0866-90-1886

1. 楕円曲線と theta-series

ここでは、楕円曲線

$$y^2 = x^3+qx+r$$

と級数

$$e_4(x) = 1+240\,\Sigma_{n\in N}\, 3^n/(x^n-1) = 1+240\,\Sigma_{n\in N}\ \sigma_3(n)\, x^n$$

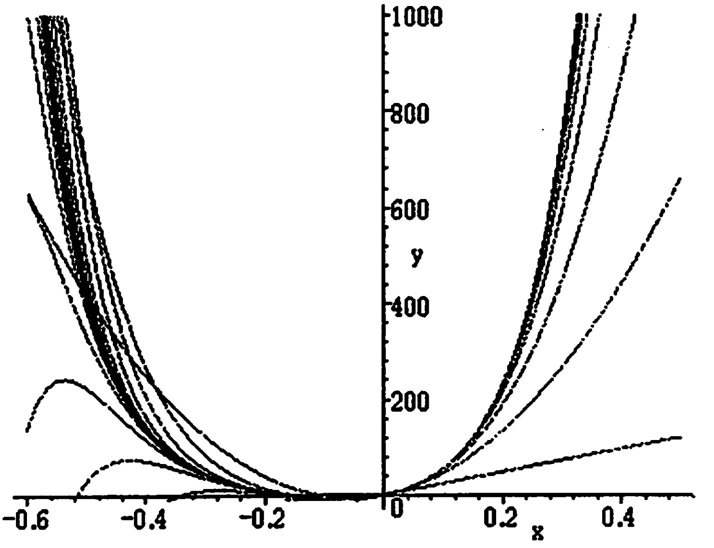
$$e_6(x) = 1-504\,\Sigma_{n\in N}\, 5^n/(x^n-1) = 1-504\,\Sigma_{n\in N}\ \sigma_5(n)\, x^n$$

$$\sigma_m(n) = \Sigma_{k|n}\, k^m$$

などとの関係について記す。具体的には

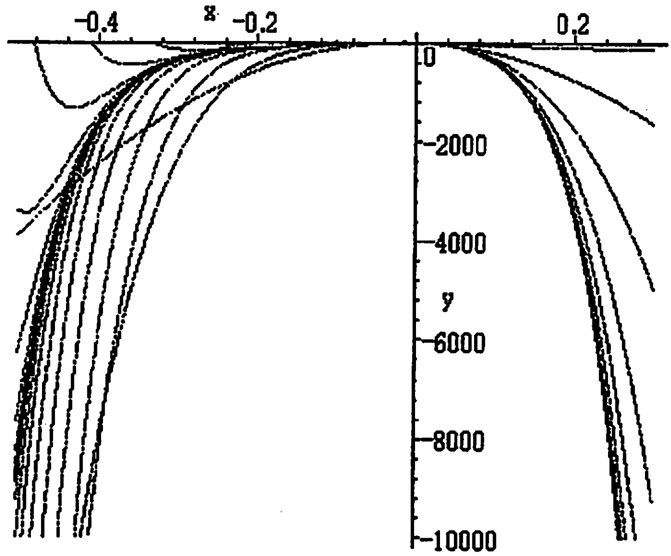
$$e_4(x) =$$

$$1+240x+2160x^2+6720x^3+17520x^4+30240x^5+60480x^6+82560x^7+140400x^8$$
$$+181680x^9+272160x^{10}+319680x^{11}+490560x^{12}+527520x^{13}+743040x^{14}$$
$$+846720x^{15}+1123440x^{16}+1179360x^{17}+1635120x^{18}+1646400x^{19}+2207520x^{20}+\cdots$$



$$e_6(x) =$$

$$1-504x-16632x^2-122976x^3-532728x^4-1575504x^5-4058208x^6-8471232x^7$$
$$-17047800x^8-29883672x^9-51991632x^{10}-81170208x^{11}-129985632x^{12}$$
$$-187132176x^{13}-279550656x^{14}-384422976x^{15}-545530104x^{16}-715608432x^{17}$$
$$-986161176x^{18}-1247954400x^{19}-1665307728x^{20}-\cdots$$



である。さて、

$$y^2 = x^3+qx+r = (x-a)(x-b)(x-c)$$

に於いて、

$$a+b+c = 0,\ c-a = 1$$

の場合 Gauss-Weierstrass の標準形という。勿論、この場合

$$a = (-b-1)/2,\ c = (-b+1)$$

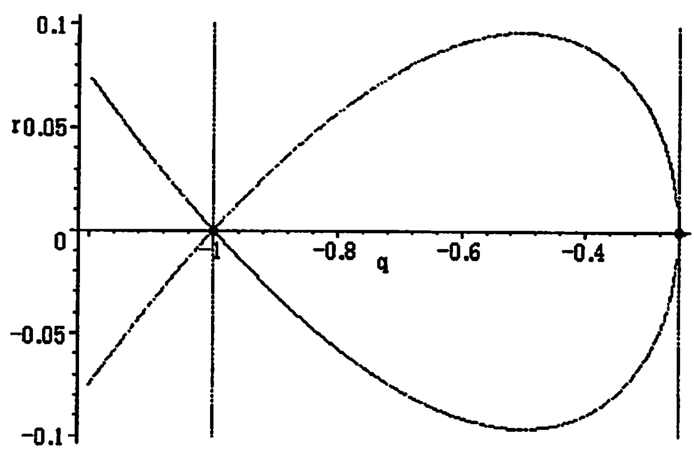
$$q = (-3b^2-1)/4,\ r = -b(b^2-1)/4$$

と表現することができる。下の 2 式から b を消去すると

$$4q+3b^2+1 ⓑ 4r+b(b^2-1) = 16(27r^2+1+6q+9q^2+4q^3)$$

が得られる。

$$27r^2+1+6q+9q^2+4q^3$$



そこで、先ず、

$$y^2 = x^3+qx+r$$

$$q = -1/3*k^{2}*e_4(x^2),\ r = 2/27*k^{3}*e_6(x^2)$$

の場合に Gauss-Weierstrass 標準形に導く $k = k(x)$を求めたい。ここでは、仮に代入を#で記すことにする：

$$27r^2+1+6q+9q^2+4q^3\#\{q = 1/3*k^{2}*e_4(x^2),\ r = 2/27*k^{3}*e_6(x^2)\}$$

と記す。定数項を含む低次の項は

$$(1-k^2)^2+(-256k^6-480k^2+480k^4)x^2+\cdots$$

であるから、$k = \pm 1$ が得られる。次に、例えば、$k = 1+ax$ を代入して低次の項を見れば

$$(-256+4a^2)x^2+(-576a+4a^3)x^3+\cdots$$

が得られる。従って、$-256+4a^2 = 0$ を解いて、$a = \pm 8$ を得る。次に $k = 1+8x+ax^2$ を代入して低次の項を見れば

$$(64a-2560)x^3+(-28416-64a+(2a+64)^2)x^4+\cdots$$

が得られる。a の 1 次式 $64a-2560 = 0$ を解いて $a = 40$ を得る。この次数より先は 1 次方程式の解として一意的な解が得られる。

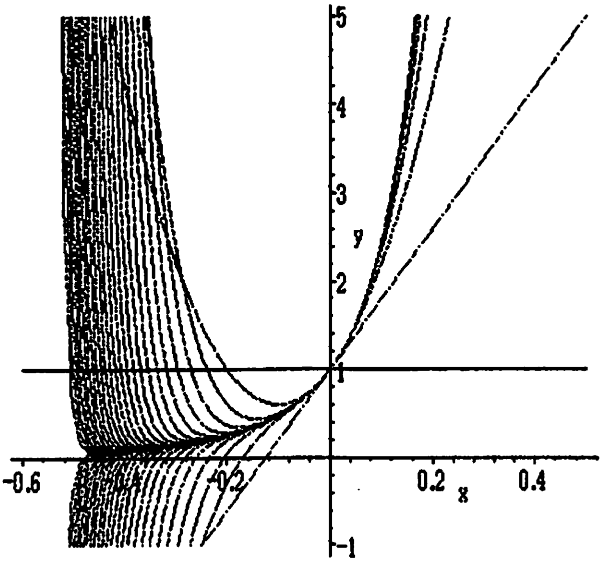
このようにして、順次項を決定して、

$$k(x) =$$

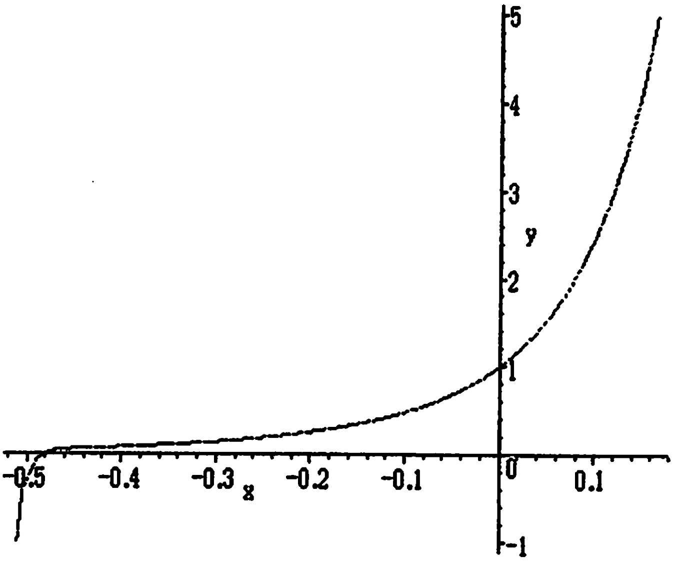
$$1+8x+40x^2+160x^3+552x^4+1712x^5+4896x^6+13120x^7+33320x^8+80872x^9$$
$$+188784x^{10}+425952x^{11}+932640x^{12}+1988080x^{13}+4137024x^{14}+8422848x^{15}$$
$$+16810536x^{16}+32943760x^{17}+63482760x^{18}+120440608x^{19}+225217904x^{20}+\cdots$$

を得る。

k(x)



上の図は収束半 >1/2 であることを示唆している。極限関数(図では 50 次までの近似)



整級数 k(x)については $\sqrt[8]{k(x)}$ までは整級数として定まる。特に、

$$1/\sqrt[4]{k(x)} =$$

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-2x^{25}+2x^{36}-2x^{49}+\cdots = \Sigma_{n\in Z}(-x)\hat{}n^2$$

$$= [2,1](x) =$$

$$(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ \cdots = \Pi_{n\in N}(1-x^{2n-1})^2(1-x^{2n})$$

のように、$x\hat{}n^2$の和としても

$$(1-x^{2n-1})^2(1-x^{2n})$$

の形の項の循環連乗積(cyclic continued exponential product. ccep)としても表現できる点は(私には)真に驚きであった。2018.04.18.09:15

$$\sqrt{k(x)} =$$

$$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}$$
$$+8160x^{11}+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108876x^{16}+174984x^{17}$$
$$+277932x^{18}+436640x^{19}+679032x^{20}+\cdots$$

$$\sqrt[4]{k(x)} =$$

$$1+2x+4x^2+8x^3+14x^4+24x^5+40x^6+64x^7+100x^8+154x^9+232x^{10}+344x^1+504x^{12}$$
$$+728x^{13}+1040x^{14}+1472x^{15}+2062x^1+2864x^{17}+3948x^{18}+5400x^{19}+7336x^{20}+\cdots$$

であり、$\sqrt[8]{k(x)}$はもう整級数では表現できない。

$$q = (-3b^2-1)/4,\ q = -1/3*k^2*e_4(x^2)$$

から b を求めると、

$$b = \pm 1/3*\sqrt{(-3-12q)} = \pm 1/3*\sqrt{(-3+4\,k(x)^2*e_4(x^2))}$$

である。定数項が正のものを b(x)と記すと

$$b(x) =$$

$$1/3(1+32x+256x^2+1408x^3+6144x^4+22976x^5+76800x^6+235264x^7+671744x^8$$

$$+1809568x^{9}+4640256x^{10}+11404416x^{11}+27009024x^{12}+61905088x^{13}$$
$$+137803776x^{14}+298806528x^{15}+632684544x^{16}+1310891584x^{17}$$
$$+2662655232x^{18}+5310231424x^{19}+10412576768x^{20}+\cdots)$$

であり、a(x), c(x)についても

$$a(x) = (-b(x)-1)/2 =$$
$$-2/3*(1+8x+64x^{2}+352x^{3}+1536x^{4}+5744x^{5}+19200x^{6}+58816x^{7}+167936x^{8}$$
$$+452392x^{9}+1160064x^{10}+2851104x^{11}+6752256x^{12}+15476272x^{13}$$
$$+34450944x^{14}+74701632x^{15}+158171136x^{16}+327722896x^{17}+665663808x^{18}$$
$$+1327557856x^{19}+2603144192x^{20}+\cdots)$$
$$c(x) = (-b(x)+1)/2 =$$
$$1/3*(1-16x-128x^{2}-704x^{3}-3072x^{4}-11488x^{5}-38400x^{6}-117632x^{7}-335872x^{8}-904784x^{9}$$
$$-2320128x^{10}-5702208x^{11}-13504512x^{12}-30952544x^{13}-68901888x^{14}-149403264x^{15}$$
$$-316342272x^{16}-655445792x^{17}-1331327616x^{18}-2655115712x^{19}-5206288384x^{20}-\cdots)$$

である。従って、

$$c(x)-a(x) = 1$$
$$h(x) = c(x)-b(x) =$$
$$-x16(1+4x+14x^{2}+40x^{3}+101x^{4}+236x^{5}+518x^{6}+1080x^{7}+2162x^{8}+4180x^{9}$$
$$+7840x^{10}+14328x^{11}+25591x^{12}+44776x^{13}+76918x^{14}+129952x^{15}+216240x^{16}$$
$$+354864x^{17}+574958x^{18}+920600x^{19}+1457946x^{20}+\cdots)$$
$$b(x)-a(x) =$$
$$1+16x+128x^{2}+704x^{3}+3072x^{4}+11488x^{5}+38400x^{6}+117632x^{7}+335872x^{8}$$
$$+904784x^{9}+2320128x^{10}+5702208x^{11}+13504512x^{12}+30952544x^{13}$$
$$+68901888x^{14}+149403264x^{15}+316342272x^{16}+655445792x^{17}$$
$$+1331327616x^{18}+2655115712x^{19}+5206288384x^{20}+\cdots$$

であり、

$$(b(x)-a(x))(b(-x)-a(-x)) = 1$$

という著しい性質がある。つまり、乗法的な逆元が変数 x を -x に置き換えることで得られるのである。

$$\sqrt{}(c(x)-b(x)) =$$
$$4i\sqrt{}x*(1+2x+5x^{2}+10x^{3}+18x^{4}+32x^{5}+55x^{6}+90x^{7}+144x^{8}+226x^{9}+346x^{10}+522x^{11}$$
$$+777x^{12}+1138x^{13}+1648x^{14}+2362x^{15}+3348x^{16}+4704x^{17}+6554x^{18}+9056x^{19}+12425x^{20}+\cdots)$$
$${}^{4}\sqrt{}(c(x)-b(x)) =$$
$$(1+i)*{}^{4}\sqrt{}x*(1+x+2x^{2}+3x^{3}+4x^{4}+6x^{5}+9x^{6}+12x^{7}+16x^{8}+22x^{9}+29x^{10}+38x^{11}$$
$$+50x^{12}+64x^{13}+82x^{14}+105x^{15}+132x^{16}+166x^{17}+208x^{18}+258x^{19}+320x^{20}+\cdots)$$

である。さて、

$$\sqrt{}(b(x)-a(x)) =$$

$$1+8x+32x^2+96x^3+256x^4+624x^5+1408x^6+3008x^7+6144x^8+12072x^9+22976x^{10}$$
$$+42528x^{11}+76800x^{12}+135728x^{12}+235264x^{14}+400704x^{15}+671744x^{16}$$
$$+1109904x^{17}+1809568x^{18}+2914272x^{19}+4640256x^{20}+\cdots$$

である。最も、著しい性質は、◇を算術幾何平均として

$$1\diamond\sqrt{(b(x)\text{-}a(x))} = \sqrt{k(x)} =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}$$
$$+8160x^{11}+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108876x^{16}+174984x^{17}$$
$$+277932x^{18}+436640x^{19}+679032x^{20}+\cdots$$

という事実です。これを検証しておきましょう。先ず、

$$s_0 = 1,\ t_0 = \sqrt{(b(x)\text{-}a(x))}$$

このとき、

$$s_1 = (s_0+t_0)/2 =$$
$$1+4x+16x^2+48x^3+128x^4+312x^5+704x^6+1504x^7+3072x^8+6036x^9+11488x^{10}$$
$$+21264x^{11}+38400x^{12}+67864x^{13}+117632x^{14}+200352x^{15}+335872x^{16}+554952x^{17}$$
$$+904784x^{18}+1457136x^{19}+2320128x^{20}+\cdots$$
$$t_1 = \sqrt[4]{(b(x)\text{-}a(x))} =$$
$$1+4x+8x^2+16x^3+32x^4+56x^5+96x^6+160x^7+256x^8+404x^9+624x^{10}+944x^{11}+1408x^{12}$$
$$+2072\,x^{13}+3008x^{14}+4320x^{15}+6144x^{16}+8648x^{17}+1207x^{18}+16720x^{19}+22976x^{20}+\cdots$$
$$s_2 = (s_1+t_1)/2 =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+80x^4+184x^5+400x^6+832x^7+1664x^8+3220x^9+6056x^{10}$$
$$+11104x^{11}+19904x^{12}+34968x^{13}+60320x^{14}+102336x^{15}+171008x^{16}+281800x^{17}$$
$$+458428x^{18}+736928x^{19}+1171552x^{20}+\cdots$$
$$t_2 = \sqrt{(s_1t_1)} =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+72x^4+152x^5+304x^6+576x^7+1056x^8+1876x^9+3240x^{10}+5472x^{11}$$
$$+9056x^{12}+14712x^{13}+23520x^{14}+37056x^{15}+57600x^{16}+88456x^{17}+134332x^{18}$$
$$+201888x^{19}+300528x^{20}+\cdots$$
$$s_3 = (s_2+t_2)/2 =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1360x^8+2548x^9+4648x^{10}+8288x^{11}$$
$$+14480x^{12}+24840x^{13}+41920x^{14}+69696x^{15}+114304x^{16}+185128x^{17}+296380x^{18}$$
$$+469408x^{19}+736040x^{20}+\cdots$$
$$t_3 = \sqrt{(s_2t_2)} =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1352x^8+2516x^9+4552x^{10}+8032x^{11}$$
$$+13872x^{12}+23496x^{13}+39104x^{14}+64064x^{15}+103456x^{16}+164872x^{17}+259580x^{18}$$
$$+404128x^{19}+622632x^{20}+\cdots$$
$$s_4 = (s_3+t_3)/2 =$$
$$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}+8160x^{11}$$

$+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108880x^{16}+175000x^{17}+277980x^{18}$
$+436768x^{19}+679336x^{20}+\cdots$

$t_4=\sqrt{(s_3t_3)}=$

$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}+8160x^{11}$
$+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108872x^{16}+174968x^{17}+277884x^{18}$
$+436512x^{19}+678728x^{20}+\cdots$

$s_5=(s_4+t_4)/2=$

$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}+8160x^{11}$
$+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108876x^{16}+174984x^{17}+277932x^{18}$
$+436640x^{19}+67903x^{20}+\cdots$

$t_5=\sqrt{(s_4t_4)}=$

$1+4x+12x^2+32x^3+76x^4+168x^5+352x^6+704x^7+1356x^8+2532x^9+4600x^{10}+8160x^{11}$
$+14176x^{12}+24168x^{13}+40512x^{14}+66880x^{15}+108876x^{16}+174984x^{17}+277932x^{18}$
$+436640x^{19}+67903x^{20}+\cdots.$

$2^5=32$ まで詳しく記したのはこの部分の計算過程が感動的であったからである。結果は、勿論、$\sqrt{k(x)}$ に一致している。

さて、一番大切な部分は、

$$h(x)=c(x)-b(x)=$$
$$-x16(1+4x+14x^2+40x^3+101x^4+236x^5+518x^6+1080x^7+2162x^8+4180x^9+7840x^{10}+\cdots)$$

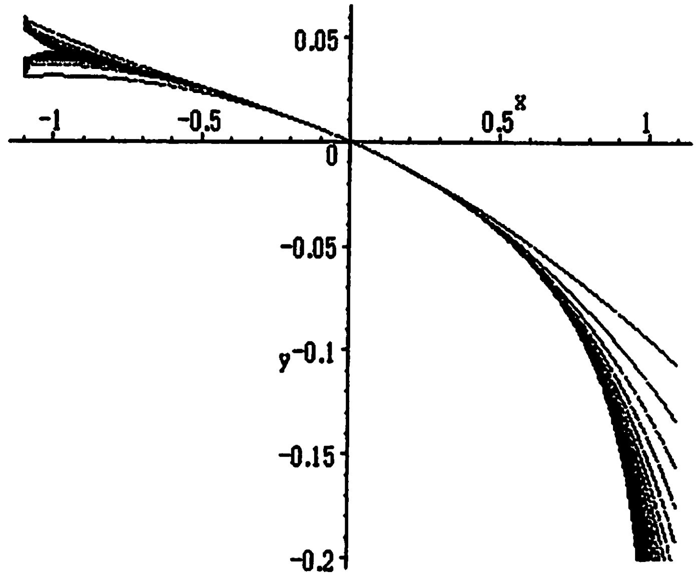
の定数項が 0 となっていることである。このことは、h(x) の逆関数が存在することを意味している。$h^{-1}(x)$ は勿論、$-x/16$ から始まっている。例えば

$$h(-x/16+ax^2)=x+(-1/2-16a)x^2+\cdots$$

であるから、$a=-1/32$ であることが判る。以下、順次係数が決定できて、結果として

$$h^{-1}(x)=$$
$$-x/16-x^2/32-21x^3/1024-3x^41/2048-6257x^5/524288-10293x^6/1048576$$
$$-279025x^7/33554432-483127x^8/67108864-435506703x^9/68719476736$$
$$-776957575x^{10}/137438953472-22417045555x^{11}/4398046511104$$
$$-40784671953x^{12}/8796093022208-95691300097211x^{13}/2251799813685248$$
$$-176526045457 91x^{14}/4503599627370496-523910972020563x^{15}/144115188075855872$$
$$-976501268709949x^{16}/288230376151711744$$
$$-9358237464065306 03x^{17}/295147905179352825856$$
$$-1758220447807291611x^{18}/590295810358705651712$$
$$-5303053845362444 1751x^{19}/18889465931478580854784$$
$$-10026846519700760 2645x^{20}/37778931862957161709568-\cdots$$

を得る。



これは $h^{-1}(x)$ の 30 次までの近似の様子の graph であるが、収束半径は 1 であろうと予想される。現実には、x に 16x を代入したものは整級数になっている。(8x ではだめ)

$$h^{-1}(16x) =$$

$$1+8x+84x^2+992x^3+12514x^4+164688x^5+2232200x^6+30920128x^7$$
$$+435506703x^8+6215660600x^9+89668182220x^{10}+1305109502496x^{11}$$
$$+191382601944 22x^{12}+282441672732656x^{13}+4191287776164504x^{14}$$
$$+62496081197436736x^{15}+935823746406530603x^{16}+14065763582458332888x^{17}$$
$$+212122153814497767004x^{18}+3208590886304243284640x^{19}$$
$$+48665578835761408780494x^{20}+\cdots$$

この逆関数を用いると

$$a(h^{-1}(x)) = (x-2)/3,\ b(h^{-1}(x)) = (1-2x)/3,\ c(h^{-1}(x)) = (1+x)/3$$

であり、

$$k(h^{-1}(x)) =$$

$$1-x/2-3x^2/32-3x^3/64-243x^4/8192-345x^5/16384-4197x^6/262144-6681x^7/524288$$
$$-5626227x^8/536870912-9483813x^9/1073741824-130357059x^{10}/17179869184$$
$$-227423643x^{11}/34359738368-25712861013x^{12}/4398046511104$$
$$-45900136743x^{13}/8796093022208-661301781591x^{14}/140737488355328$$
$$-1199996381451x^{15}/281474976710656-8977726133749107x^{16}/2305843009213693952$$
$$-16492360419013053x^{17}/4611686018427387904$$
$$-24360479184554 4159x^{18}/73786976294838206464$$
$$-45180479516231 8671x^{19}/147573952589676412928$$
$$-5384455941231678 5907x^{20}/188894659314785808547840-\cdots$$

確かなこととして次のことを確認しておく。

$$e_4(x^2)k(x)^2 = (-3)(a(x)b(x)+b(x)c(x)+c(x)a(x)) =$$

$$1+16x+384x^2+4800x^3+41984x^4+290016x^5+1688064x^6+8612736x^7+39542784x^8$$

$$+166415952x^9+650786048x^{10}+2389488192x^{11}+8304734208x^{12}$$

$$+27499727968x^{13}+87220687872x^{14}+266140096128x^{15}+784161898496x^{16}$$

$$+2238046981920x^{17}+6203984795520x^{18}+16742619359680x^{19}+44076940130304x^{20}+\cdots$$

また、

$$h(x) = c(x)-b(x)$$

であったから、

$$a(x)b(x)+b(x)c(x)+c(x)a(x)\#\{x=h^{-1}(x)\} = -(1-x+x^2)/3$$

$$a(x)b(x)c(x)\ \#\{x=h^{-1}(x)\} = -(2-3x-3x^2+2x^3)/27$$

であり、従って、

$$e_4(x^2)k(x)^2\#\{x=h^{-1}(x)\} = 1-x+x^2$$

$$e_6(x^2)k(x)^3\#\{x=h^{-1}(x)\} = (2-3x-3x^2+2x^3)/2$$

である。

$$1/4\sqrt{\ }k(x) =$$

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-2x^{25}+2x^{36}-2x^{49}+\cdots = \Sigma_{n\in Z}(-x)^{n\verb|^|2}$$

などに注意すると

$$e_4(x^2)\ \#\{x=h^{-1}(x)\} = (1-x+x^2)\ ((1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-2x^{25}+2x^{36}-2x^{49}+\cdots)^8\ \#\{x=h^{-1}(x)\})$$

である。

2. η-関数

η-関数は次のような無限和と無限積によって定義された整数係数の級数です。

$$\eta(x) = x^{1/24}\cdot\Pi_{n\in N}(1-x^n) = \Sigma_{n\in Z}(-1)^n x^{1/24\cdot(6n+1)\verb|^|2} = x^{1/24}\cdot\Sigma_{n\in Z}(-x)^{n(3n+1)/2}.$$

この級数は $x^{1/24}$ の級数で

$$\eta(x)^{24} = x\cdot\Pi_{n\in N}(1-x^n)^{24}$$

は x の整級数です。

$$\Pi_{n\in N}(1-x^n) = \Sigma_{n\in Z}(-x)^{n(3n+1)/2} =$$

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-x^{70}-x^{77}+x^{92}+x^{100}-x^{117}$$

$$-x^{126}+x^{145}+x^{155}-x^{176}-x^{187}+x^{220}+x^{222}-x^{247}-x^{260}+x^{287}+x^{301}-x^{330}-x^{345}+\cdots$$

であり、特に、その３乗は

$$\Pi_{n\in N}(1-x^n)^3 = \Sigma_{n\in Z}(-1)^n\cdot(4n+1)\ (-x)^{n(2n+1)} =$$

$$1-3x+5x^3-7x^7+9x^{10}-11x^{15}+13x^{21}-15x^{28}+17x^{36}-19x^{45}+21x^{55}-23x^{66}+25x^{78}-27x^{91}$$

$$+29x^{105}-31x^{120}+33x^{136}-35x^{153}+37x^{171}-39x^{190}+41x^{210}-43x^{231}+45x^{253}-47x^{276}+49x^{300}-\cdots$$

であり、

$$\eta(x)^3 = x^{1/8}\cdot\Sigma_{n\in Z}(-1)^n\cdot(4n+1)\ (-x)^{n(2n+1)} = \Sigma_{n\in Z}(-1)^n\cdot(4n+1)\ (-x)^{1/8\cdot(2n+1)\verb|^|2}.$$

である。特に、$n+m+k+h=24$ の場合は

$$f(x)=\eta(x^n)\eta(x^m)\eta(x^k)\eta(x^h)$$

は x の整級数で k, [1,q,r, s]の組み合わせによっては楕円曲線の合同ζ関数とも関係しています。

$$\eta(x^n)\eta(x^m)\eta(x^k)\eta(x^h)$$

[1,q,r,s]	k	$y^2=x^3+ax+b$	$-4a^3/27b^2$
[1,1,1,1]	6	$y^2=x^3+1$	0
		$y^2=x^3-15x+22$	$5^3/11^2$
[1,1,2,2]	4	$y^2=x^3-x$	
		$y^2=x^3-11x+14$	$11^3/(3^37^2)$
[1,1,3,3]	3	$y^2=x^3+2$	0
		$y^2=x^3-120x+506$	$2^95^3/(11^223^2)$
[1,1,5,5]	2	$y^2=x^3-12x+11$	$2^8/11^2$
		$y^2=x^3+33x+74$	$-11^3/37^2$
[1,1,2,8]	2	$y^2=x^3+6x+20$	$-2/5^2$
		$y^2=x^3-21x+34$	$7^3/17^2$
[1,1,1,9]	2	$y^2=x^3+4$	0
[1,2,3,6]	2	$y^2=x^3+6x+7$	$-2^5/7^2$
		$y^2=x^3-39x+70$	$13^3/(5^27^2)$
		$y^2=x^3-219x+1190$	$73^3/(5^27^217^2)$
[1,1,11,11]	1	$y^2=x^3-12x+38$	$2^6/19^2$
[1,2,7,14]	1	$y^2=x^3-75x+506$	$5^6/(11^223^2)$
[1,3,5,15]	1	$y^2=x^3-3x+322$	$1/(7^223^2)$

特に、

$$\eta(x)^{24}=(\eta(x)^3)^8=x\cdot\Pi_{n\in N}(1-x^n)^{24}=$$
$$x-24x^2+252x^3-1472x^4+4830x^5-6048x^6-16744x^7+84480x^8$$
$$-113643x^8-115920x^{10}+534612x^{11}-370944x^{12}-\cdots$$

係数 a_p と $1+a_p+p^{11}$ については興味深いものがあります：

$$a_p=\mathrm{coeff}(\eta(x)^{24},x,p)$$

p	a_p	$1+a_p+p^{11}$
2	-24	3*691
3	252	2^8*691
5	4830	2^{10}*3*23*691
7	-16744	2^9*3^5*23*691

11	534612	$2^{8}*3*5^{3}11*17*23*691$
13	-577738	$2^{10}*3^{5}*7*691*1489$
17	-6905934	$2^{11}*3^{2}*23*691*116993$
19	10661420	$2^{8}*3^{6}*5^{2}*23*691*1571$
23	18643272	$2^{9}*3*23*691*39030947$

$p = 691$ は常に $1+a_p+p^{11}$ の約数で 23 は素数の 2/3 の割合で約数である。$p = 691$ に対しても

$691,\ a_{691} = -2747313442193908,\ 2^{8}*3^{6}*5^{3}*23^{2}*101*139*691*429766318146157$

では 23^2 が重複する約数です。また、素数 $p = 691$ は

$$x/(e^{x}-1) =$$

$$1-x/2+x^{2}/12-x^{4}/720+x^{6}/30240-x^{8}/1209600+x^{10}/47900160-691x^{12}/1307674368000$$
$$+x^{14}/74724249600-3617x^{16}/10670622842880000+43867x^{18}/5109094217170944000+\cdots.$$

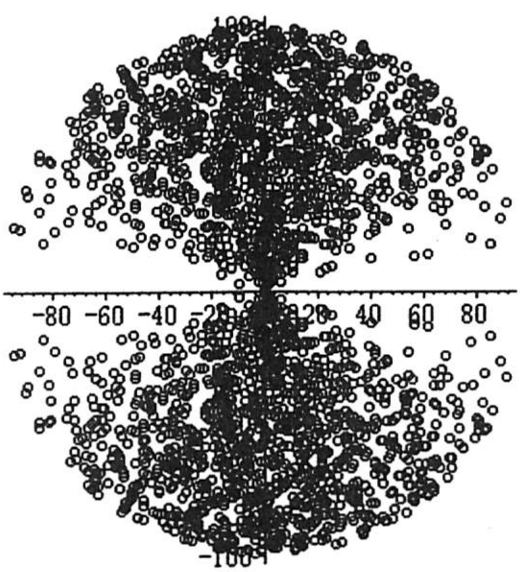
の 12 次の項の係数の分子として現れることは有名な事実です。

また、

$$x^{2}-a_{p}x+p^{11} = 0$$

の複素数根の偏角の分布が $\sin^{2}(\theta)$分布(Sato-Tate distribution)になるだろうと予想されています。

$\eta(x)^{24}$, p = 2~9973



$$\eta(x^{8})^{3} = \Sigma_{n\in N}(-1)^{n}\cdot(2n+1)\,x^{(2n+1)^{\wedge}2} =$$

$$x-3x^{9}+5x^{25}-7x^{49}+9x^{81}-11x^{121}+13x^{169}-15x^{225}+17x^{289}-19x^{361}+21x^{441}-23x^{529}+25x^{625}$$
$$-27x^{729}+29x^{841}-31x^{961}+33x^{1089}-35x^{1125}+37x^{1369}-39x^{1521}+41x^{1681}-43x^{1849}+45x^{2025}$$

$$-47x^{2209}+49x^{2401}-51x^{2601}+53x^{2809}-55x^{3025}+57x^{3249}-59x^{3481}+61x^{3721}-63x^{3969}+65x^{4225}$$
$$-67x^{4489}+69x^{4761}-71x^{5041}+73x^{5329}-75x^{5625}+77x^{5929}-79x^{6241}+81x^{6561}-83x^{6889}+85x^{7225}$$
$$-87x^{7569}+89x^{7921}-91x^{8281}+93x^{8649}-95x^{9025}+97x^{9409}-99x^{9801}+\cdots$$

については、10000より小さい奇数 $2n+1$ の平方の位置に $\pm(2n+1)$ を交互に置いた無限級数です。項の個数は(奇数ばかりだから)最高次数の平方根の半分です。従って、この級数を出発点に選んで

$$\eta(x^4)^6,\ \eta(x^2)^{12},\ \eta(x)^{24}$$

のように平方(squaring)を3度実行すれば良いわけですが、平方する度に複雑さが増すことは当然のことです。

この場合は平方数のみの係数が0ではないので素数のところの係数は常に0です。$q=r^2=(n(2n+1))^2$ のところ、つまり、x^q の係数は $a_q=r=(-1)^n(2n+1)$ ですから、2次方程式

$$x^2-a_qx+q=x^2-(-1)^n(2n+1)x+(n(2n+1))^2=0$$

の複素数根の偏角の分布は $\pm45°=\pm\pi/4$ の2-点分布になります。

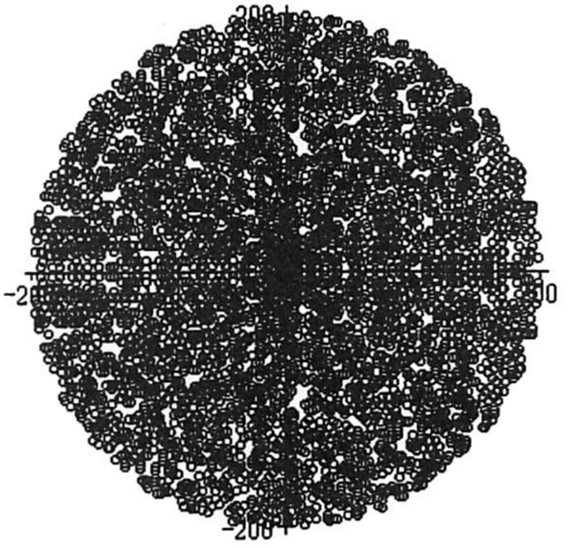
$$\eta(x^4)^6=$$
$$x-6x^5+9x^9+10x^{13}-30x^{17}+11x^{25}+42x^{29}-70x^{37}+18x^{41}-54x^{45}+49x^{49}$$
$$+90x^{53}-22x^{61}-60x^{65}-110x^{73}+81x^{81}+180x^{85}-78x^{89}+130x^{97}+\cdots$$

ですが、素数次数の係数 a_p については $[p, a_p]$ の組は、$p=4n+1$ の形のもののみ現れて
[5, -6], [13, 10], [17, -30], [29, 42], [37, -70], [41, 18], [53, 90], [61, -22], [73, -110], [89, -78], [97, 130], [101, -198], [109, -182], [113, -30], [137, 210], [149, -102], [157, 170], [173, 330]
のようです。この場合、

$$x^2-a_px+p^2=0$$

Gauss整数の範囲で分解しています。つまり、$p^2=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$ の組(Pythagorian pair)を与えています。従って、$\eta(x^4)^6$ は $4n+1$ の形の素数の p^2 の(p のではない)Gauss整数分解を与えています。この(複素数としての)偏角の分布は一様分布です。$\eta(x^4)^6$ は素数 $p=4n+1$ の長さを斜辺にもつピタゴラス三角形の頂点を表す平面図形の生成多項式(母関数, mother function)なのです。

$$\eta(x^4)^6$$
$$x^2-a_px+p^2=0,\ p^{1/2}x^2-apx+p^{3/2}=0,\ p=3\sim39989$$



$\eta\,(x^2)^{12}=$

$$x-12x^3+54x^5-88x^7-99x^9+540x^{11}-418x^{13}-648x^{15}+594x^{17}+836x^{19}+1056x^{21}-4104x^{23}$$
$$-209x^{25}+4104x^{27}-594x^{29}+4256x^{31}-6480x^{33}-4752x^{35}-298x^{37}+5016x^{39}+17226x^{41}$$
$$-12100x^{43}-5346x^{45}-1296x^{47}-9063x^{49}-7128x^{51}+19494x^{53}+29160x^{55}-10032x^{57}$$
$$-7668x^{59}-34738x^{61}+8712x^{63}-22572x^{65}+21812x^{67}+49248x^{69}-46872x^{71}+67562x^{73}$$
$$+2508x^{75}-47520x^{77}-76912x^{79}-25191x^{81}+67716x^{83}+32076x^{85}+7128x^{87}+29754x^{89}$$
$$+36784x^{91}-51072x^{93}+45144x^{95}-122398x^{97}-53460x^{99}+\cdots$$

この場合は、対応する方程式は $x^2\pm a_px+p^5=0$ であるが、$x=1$ のときの値

$$1\pm a_p+p^5$$

の重複因数なども興味がある。例えば、偏角の分布が $\sin^2(\theta)$分布になるかどうかなどは±によって変化はありませんが、重複因子などでは差があります。

$$1+a_p+p^5$$

では、p = 2 ~ 19997(226 個)の範囲ですけれども、比較的大きい数では p = 131, 367, 20411 があります。

[131, 16823, $2^4*3*5*7*109*131^2 719*596362001$],

[367, 2357, $2^2*3^2*7*41*367^2 52273477$],

[20411, 4729, $2^2*11*73*631*2801*20411^2$]

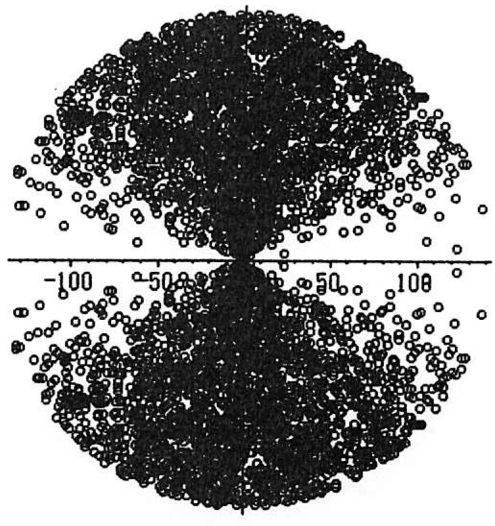
$$1-a_p+p^5$$

の場合は 11^2 が因子になる場合は特に多く、2261 個の素数のなか 468 個、つまり、約 5 個に 1 個が 11^2 を約数にもちます。大きい素数の重複因子では p = 167, 1093 があります。

[167, 18793, $2^{12}*3^3*167^2*760018063531$], [1093, 6977, $2^{11}*3*7*1093^2*321776293$]

符号の取り方は、根と係数の関係などからすると-(minus)の方が正当なのでしょう。

$x^2-a_px+p^5=0$, $p^2x^2-apx+p^3=0$, $\eta\,(x^2)^{12,}$ p = 3 ~ 19997



multiple factor q^m of $1-a_p+p^{11}$

example p = 2 ~ 9973, q = up to 1000000

double factor q^m	p	$1-a_p+p^{11}$
$11^2, 23^2$	59	$2^8*3*5^2*11^2*17*23^2*691*2088829$
13^2	73	$2^{11}*3^7*13^2*19*107*691*295033$
$17^2, 23^2$	853	$2^{10}*3^5*7*17^2*23^2*691*3422011*276262609159$
19^2	107	$2^8*3^3*19^2*23*691*530768010263$
23^3	173	$2^{10}*3*23^3*191*691*134683*6252853$
$23^2, 41^2$	3307	$2^8*3^5*23^2*41^2*691*5820105523*2325399707364523$
53^2	1447	$2^9*3^5*23*53^2*103*691*23739973163*16097*266353$
$23^2, 89^2$	3623	$2^9*3*23^2*89^2*691*3328891849*95355783783469291$
241^2	673	$2^{11}*3^5*7*11*241^2*307*691*27169912975591$
691^2	3559	$2^9*3^5*5^2*23*691^2*33970950149764282807939207$
?	?	?

尚、形式的な拡張として

$$\eta\,(x^{1/2})^{48} =$$

$$x^{1/2}-48x+1080x^{3/2}-15040x^2+143820x^{5/2}-985824x^3+4857920x^{7/2}-16295040x^4$$
$$+28412910x^{9/2}+38671600x^5-424520544x^{11/2}+1268350272x^6-1211937160x^{13/2}$$
$$-4306546080x^7+18293091840x^{15/2}-23522231424x^8-26299018683x^{17/2}$$
$$+137218594320x^9-150999182320x^{19/2}-134713340160x^{10}+449283648132x^{21/2}-\cdots$$

その素数(整数)冪の係数は次のようである。

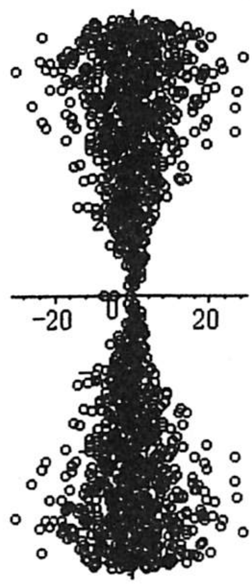
[2, -2^6*5*47], [3, $-2^5*3^3*7*163$], [5, $2^4*5^2*11^2*17*47$], [7, $-2^5*3^2*5*17*19*47*197$],

$[11, -2^5*23*47*317*9697], [13, 2^5*3^5*5*47*1418953], [17, -2^6*5*7^2*23*47*1521853],$
$[19, 2^5*3*5*7*47*211*3309107], [23, 2^6*17*47*71067341341],$
$[29, 2^4*5*11*17*953*12577*173141], [31, 2^5*3^3*7*47*587*1951*87011],$
$[37, 2^4*3*5^2*97*1129*2689*272201], [41, 2^4*7*47^2*9894599898439],$
$[43, 2^5*3^2*5*29*47*485209*688073], [47, 2^5*5^3*19*47^2*71*107*3905533], \cdots$

これらの因数のなか $p=47$ は特別で、$q=3, 37$ などを除いてすべての約数になっている。

$\eta\ (x^{1/2})^{48}$, $p = 2\sim4999$

$x^2-a_px+p^{23} = 0$, $p^{11}x^2-a_px+p^{12} = 0$

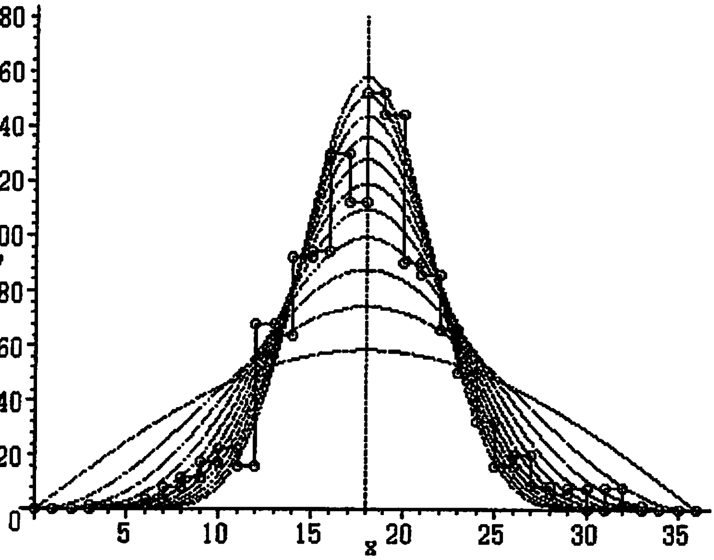


この場合の分布は Sato-Tate 分布($\sin^2$-distribution)ではない。

現実には $x^2-a_px+p^{23}=0$ ではなくて、むしろ、$2a_p$ 考えると $x^2-2a_px+p^{23}=0$ は $p=2,3$ を除いたすべての素数について非実根 ($3a_p$ では実数根をもつものが多い) をもつ。

$\eta\ (x^{1/2})^{48}$, $p = 2\sim4999$

$x^2-2a_px+p^{23} = 0$, $p^{11}x^2-2a_px+p^{12} = 0$, arguments//10°

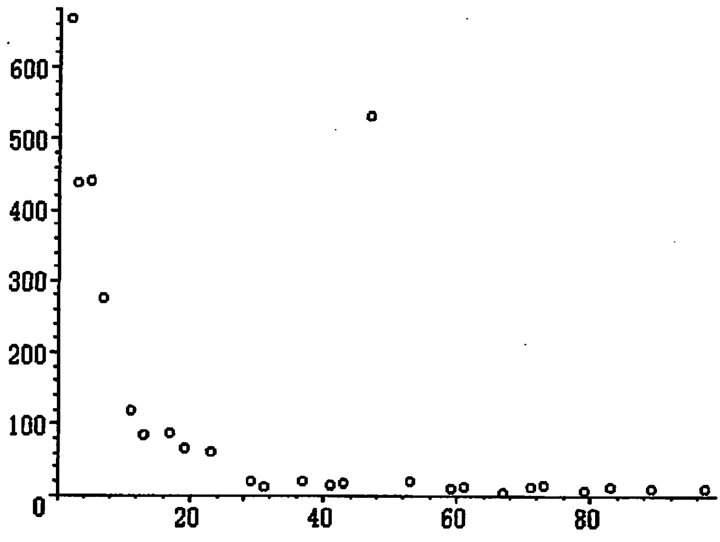


尚、素数次の係数で素数 q の約数になるものは、4999 までの素数 669 個のうち何個あるかを示したものが次の図である。p = 47 は特別で 533 個であり、頻度として突出している。

$$533/669 = 0.7967115097 \fallingdotseq 4/5$$

でありこれが頻度であろうと予想される。

$a_p = \mathrm{coeff}(\eta(x^{1/2})^{48}, x, p)$, $[q, \#\{p<5000: q \mid a_p\}]$



冪に関しては、例の q = 47 に対しては,

$$[967, -2^5*3^4*5*23*47^4*1471*32993*997055977]$$

指数は 4 である。この指数はいくらでも大きなものが存在するのだろうか。また大きな素数では q = 2459 がある。この場合は

$$[4909, -2^4*3^4*5*7*11*19*47*2459^2*9103*609316376091272584543 7]$$

が存在する。この場合の 47, 2459 は $\eta(x)^{24}$ の場合の 23, 691 に相当するのだろうか。

3. 循環冪乗積

$$[\pm a,\pm b,\pm c,\ \cdots](x)=(1\pm x)^a(1\pm x^2)^b(1\pm x^3)^c\cdots.$$

のような無限積で表現される級数を冪乗積(exponential product)と呼び、指数の列が循環するものを循環冪乗積(cyclic exponential product, *cexp*)と呼びます。例えば、

$$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(3n+1)/2},\quad \Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(3n+1)/2}$$

のように符号付と符号のないものがあります。符号付の方には*を付けて表示してあります。

cyclic exponential product

(a,b) = 1	n(an+b)	cyclic index	square form	bias
[1,0]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n\wedge 2}$	[-2,1]	n^2	1
[1,0]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n\wedge 2}$	[2,-1]	〃	〃
[2,1]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(2n+1)}$	[-1,0,-1,1]	$(4n+1)^2/8$	$x^{1/8}$
[2,1]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(2n+1)}$	[1,0,1,1]	〃	〃
[3,1]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(3n+1)/2}$	[-1,-1,1]	$(6n+1)^2/24$	$x^{1/24}$
[3,1]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(3n+1)/2}$	[1] = [1,1,1]	〃	〃
[3,2]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(3n+2)}$	[-1,0,0,0,-1,1]	$(3n+1)^2/3$	$x^{1/3}$
[3,2]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(3n+2)}$	[1,0,0,0,1,1]	〃	〃
[4,1]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(4n+1)}$	[0,0,-1,0,-1,0,0,1]	$(8n+1)^2/16$	$x^{1/16}$
[4,1]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(4n+1)}$	[0,0,1,0,1,0,0,1]	〃	〃
[4,3]	$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(4n+3)}$	[-1,0,0,0,0,0,-1,1]	$(8n+3)^2/16$	$x^{9/16}$
[4,3]*	$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(4n+3)}$	[1,0,0,0,0,0,1,1]	〃	〃

例えば、自然数 h = 7 の場合の指数の 2 次式(quadric polynomial) n(7n+k)の場合は、期待される通り、周期 2k = 14 = 7*2 の 3 個の $\eta(x^{2k})$を含む sexp の積になります。指数部分は n = ±k mod 2h です。

$$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{n(7n+k)}=$$
$$\eta(x^{14})*\Pi_{n\in N}(1-x^{7(2n+1)-k})*\Pi_{n\in N}(1-x^{7(2n+1)+k})=$$
$$\eta(x^{14})*\Pi_{n\in N}(1-x^{7(2n+1)-k}-x^{7(2n+1)+k}+x^{14n})$$

これは θfunction の場合と同じです。.

$$\Sigma_{n\in Z}\ (-1)^n x^{(14n+k)\wedge 2/28}=$$
$$x^{k\wedge 2/28}\,\eta(x^{14})*\Pi_{n\in N}(1-x^{7(2n+1)-k})*\Pi_{n\in N}(1-x^{7(2n+1)+k})=$$

また、n(n+1)の場合

$$\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(n+1)}=\Sigma_{n\in Z}\ x^{n(n-1)}$$

は特別です：符号付の場合は 0 です。

$$\sum_{n \in Z} x^{n(n+1)} = 2 \sum_{n \in Z} x^{n(2n+1)}$$

4. 算術幾何平均

二つの数 a, b の算術幾何平均(Arithmetic-geometric mean, AGM, amalgam) は、帰納的に次のように定義される：

$$a_0 = a,\ b_0 = b,$$
$$a_{n+1} = (a_n+b_n)/2,\ b_{n+1} = \sqrt{(a_n b_n)}$$

この数列は共通の数に急速に収束し、その極限値を算術幾何平均と呼び

$$a \Diamond b = AGM(a,b).$$

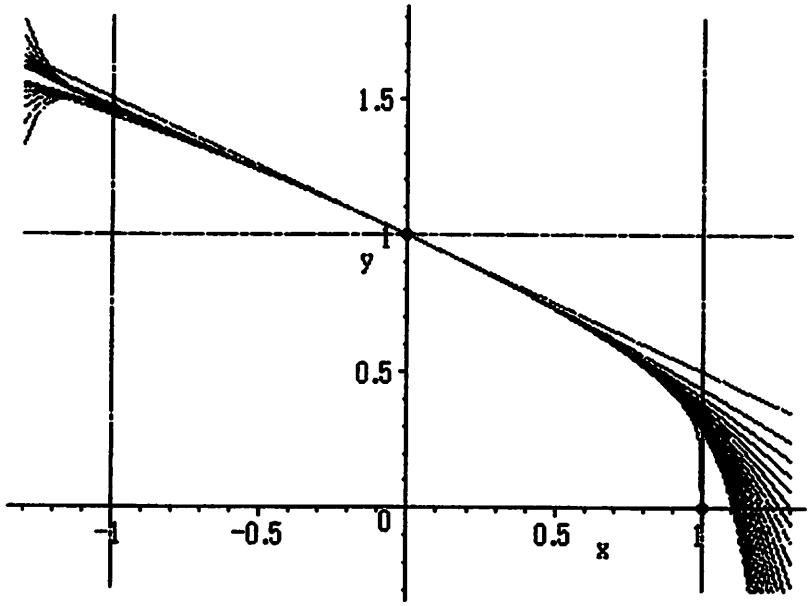
のように記する。このとき

$$a \Diamond b = b \Diamond a, \quad k(a \Diamond b) = ka \Diamond kb$$

などの性質がある。特に $1 \Diamond (1-x)$ は x の級数である:

$$1 \Diamond (1-x) = 1 - x/2 - x^2/16 - x^3/32 - 21x^4/1024 - 31x^5/2048 - 195x^6/16384$$
$$-319x^7/32768 - 34325x^8/4194304 - 58899x^9/8388608 - 410771x^{10}/67108864 - \cdots$$

$1 \Diamond (1-x)$, up to degree 1 ~ 20, 99



この級数の係数の分母は常に 2 の冪であり、分子については次のようである：

$$u_n = -\mathrm{numer}(\mathrm{coeff}(1 \Diamond (1-x), x, n)),\ n = 1 \sim 50$$

[-1, 1, 1, 1, 21, 31, 195, 319, 34325, 58899, 410771,
725515, 20723767, 37333629, 271115065, 495514197,
233205886357, 430943899067, 3199978103003, 5964657807435, 178539994327007,
335121426695981, 2523666921164889, 4764190677167837,
577048356063146487, 1094592245102072753, 8322830441317685713,
15851800356386516041, 483941530607649649605, 924950347938103651879,

7082478014317986390235, 1357776712542774842723l,
2669113370589441870l925269, 5130555290138926923455258 7,
3949541932407644056486417 39, 760962775228959033000324011,
2348368802134405690502928 7959, 4534084984241532912490859002l,
3505013872530531083797719l387 3, 6779922400306602109107943 95205,
840067884863170674858850103 84223,1627721454145644055290383 51777785,
12625380599563535428118563 43619897, 245003042181098574452696681 7450817,
76124784257439554628251329 032105941,
14792934758227507035459764404101712 7,
11505969345552387460394462179885275l5,
2238723772602242567755031762620113935,
1115770242526589398988689057268900387447,
2173478580304093813387832287065433833945]

特に興味深いことは x^{48} の係数が 4799^2 を約数としてもつことである。

$$u_{48} = 2238723772602242567755031762620113935$$
$$= 5*13*19*787*4799^2*10259*29147*334470970540471.$$

次の graph は n 次の係数 u_n が重複因子をもつ場合である。

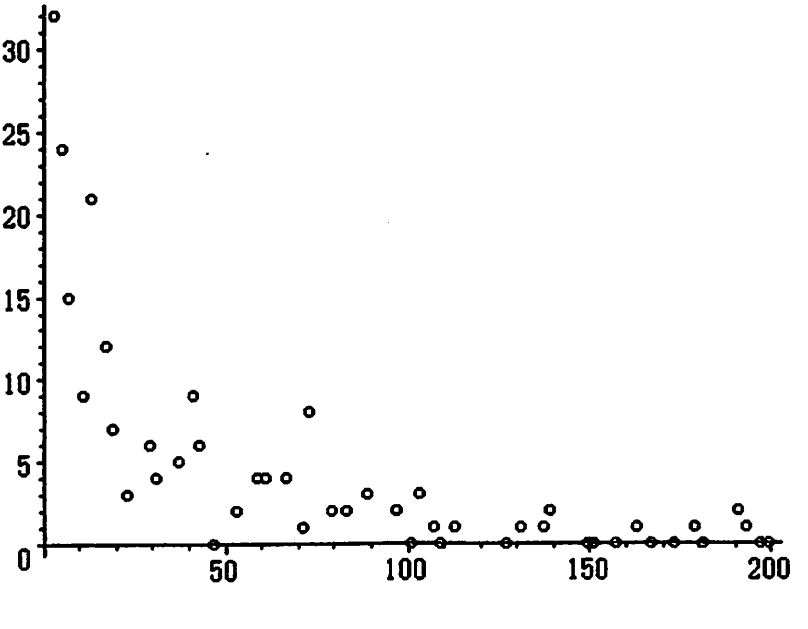
$p^2 \mid u_n$, $p = 3 \sim 1000000$, $n = 1 \sim 99$

[3, [14, 16, 29, 41, 43, 55, 68, 70, 95, 97]],

[5, [9, 84]], [7, [27]], [11, [18, 74]], [13, [42]], [4799, [48]]

Next one is the graph of number m of primes $p \mid u_n$, $n = 1 \sim 199$.

[p, #n∈200(p | u_n)]



ここでは200次までの係数として

47, 101, 109, 127, 149, 151, 157, 167, 173, 181, 197, 199, …

は現れていない。p = 47 はずっと現れないのだろうか。 4799より大きい素数の複数冪が存在するのであろうか。

References

[1] Anthony W. Knapp, *Elliptic curves*, Mathematical Notes 40, Princeton University Press, Princeton , New Jersey 1992

[2] Kanji Namba, Dedekind η 関数と佐藤 $\sin^2$-予想 (Dedekind η -function and Sato's $\sin^2$-conjecture), Reports of 16th Symposium on the History of Mathematics (2005), Institute for Mathematics and Computer Science, Tsuda College, Tokyo 2006, pp.95-167

[3] Kanji Namba, 2次形式とその theta 級数について(binary forms and their theta series), Reports of 28th Symposium on the History of Mathematics (2017), Institute for Mathematics and Computer Science, Tsuda College, Tokyo 2018, pp.148-171