

ゲージ対称性から標準理論へ

—ワイルの構想とその影響—

佐野 茂 (Shigeru SANŌ)

2018年10月6日

はじめに

ワイルはヒルベルトの指導の下で 1908 年に学位を取得している。そしてワイルは 1913 年にチューリッヒ連邦工科大学 (ETH) にポストを得てアインシュタインと同僚になった。

1916 年に発表されたアインシュタインの相対性理論に強い興味をもち素早く工科大学で講義して、1918 年に『空間・時間・物質』という本を出版している。

またゲッチンゲンのヒルベルトのもとに招かれた女流数学者ネーターが発表した定理から局所的対称性の重要性に気づきゲージ対称性と呼んでいる。そしてエネルギー保存則、運動法則、角運動保存則がそれぞれのゲージ対称性から得られることを示し、ゲージ対称性から相対性理論を見直している。相対性理論が電磁気に対するマックスウェルの方程式を導くための基礎として使えることを明らかにしたのである。

当時知られていたのは重力と電磁力の 2 つの力だけだった、この 2 つの力に対しゲージ対称性から統一的理論が出来るのではないかとワイルは考えたがうまくいかなかった。しかし電磁力は後の弱い力、強い力とゲージ対称性により説明できる統一理論へと歴史は動いていった。

電磁力が光子交換により生まれることを示す量子電気力学 (QED)、強い力と電磁力を扱う量子色力学 (QCD) そしてヒッグス場により質量が与えられ弱い力もゲージ対称性にもとづいて統一的に理解出来るようになっていったのである。

§ 1. ネーターの定理とゲージ対称性

ラグランジアン $L = L(q, \dot{q})$ ($\dot{q} = dq / dt$) に対して変分法を用いてオイラー・ラグランジュの方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

を得る。この方程式を用いてネーターは次の定理を 1915 年に導いている。

<ネーターの定理>

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = \text{一定}$$

このネーターの定理の意味する内容をワイルは真剣に考えている。そして局所的対称変換から保存法則が与えられると本質を見抜き、この局所的対称性をゲージ対称性と名づけたのである。

例えば運動エネルギーと位置エネルギーに関するラグランジアンは

$$L = L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right)$$

となるが、ネーターの定理より

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \text{一定}$$

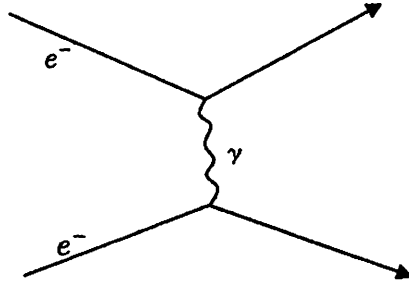
を得る。これは運動エネルギーと位置エネルギーにおけるエネルギー保存則である。同様に空間の並進性から運動法則、回転性から角運動量保存則が得られることをワイルは示した。

またワイルはアインシュタインの相対性理論に強い興味をもって自分のものにして、特殊相対性理論での固定ゲージ上を走る列車のように時空の点と点の間の距離に関する対称性にも注目している。

さらにワイルは一般共役性の原理をゲージ不変性のひとつに一般化することにより、アインシュタインの一般相対性理論が電磁気におけるマックスウェルの方程式を導くための基礎として使えることを発見している。当時知られていたのは重力と電磁気力の二つの力のみだった、この二つの力が統一的に扱えるのではないかと思われたが、うまくいかなかった。しかし後に見つかった弱い力、強い力とこの電磁力とはゲージ対称性により統一的に扱えるように理論は深化していった。

§ 2. 電磁力

電子 e^- はマイナスの電荷をもっているために互いに反発をするが、これは光子交換 γ による相互作用であることが実証されている。



光子のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

を満足している。この方程式よりマックスウェルの方程式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \end{cases}$$

が導かれる。

電気力学を量子化することにより量子電気力学(Quantum Electrodynamics, QED)が生まれ高い精度で磁気モーメントなどが求められている。そのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\varphi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\varphi + e\bar{\varphi}\gamma^\mu A_\mu \varphi$$

であり、朝永、シュウインガーの量子電気力学の式である。

第1項からは電磁場の方程式がでる。第2項から自由電子を記述するディラック方程式が導かれるが、ディラック方程式は反粒子も表している。実際に電子 e^- の反粒子である陽

電子 e^+ が発見されている。

第3項には電子の波動関数 φ と電磁ポテンシャル A_μ の両方が入っていて、電子と光子の相互作用を表している。そしてその相互作用の強さを表す結合定数が電荷 e である。電子の波動関数 φ のゲージ $U(1)$ 対称性は電荷の保存則と結びついている。

§ 3. バリオンとメソンの分類

陽子 p や中性子 n は3個のクォークからなり、パイ中間子はクォークと反クォークの組からなっている。現在までに知られているクォークは3つの階層になっている。

表 1

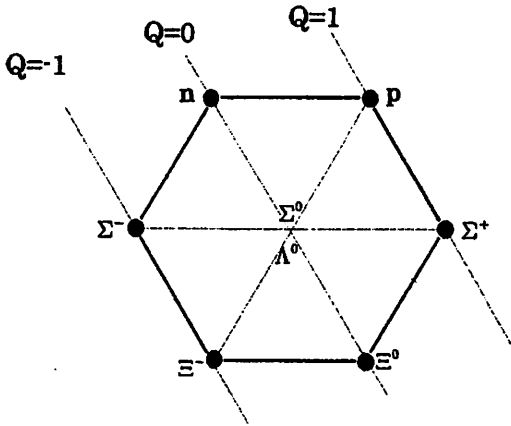
クォーク	スピン	バリオン数 B	レプトン数 L	電荷 Q	質量 MeV
u	1/2	1/3	0	2/3	3
d	1/2	1/3	0	-1/3	6
c	1/2	1/3	0	2/3	1,200
s	1/2	1/3	0	-1/3	120
t	1/2	1/3	0	2/3	174,000
b	1/2	1/3	0	-1/3	4,200

基本となる素粒子はクォーク u, d, s で成り立っている。群 $SU(3)$ の 3次元表現のテンソル積の既約分解は

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

となる。1965年の早い時期に南部陽一郎は素粒子がこの分解に従っていくことを論文で予想している([HN])。実際に新しい素粒子が次々に発見されるが、この表現の既約分解は素粒子の分類に大きな指針となっていく。当時3種類のクォーク u, d, s しか知られていなかった1973年に益川敏英・小林誠はさらに少なくとも3種類のクォークがあればCP対称性がわずかに破れることを理論的に示した。

◎バリオン 8重項



◎主なバリオン粒子

表 2

バリオン粒子	構成	質量 MeV	電荷 Q
陽子 p	uud	938	1
中性子 n	udd	940	0
シグマ粒子 Σ ⁺	uus	1,189	1
シグマ粒子 Σ ⁰	uds	1,193	0
シグマ粒子 Σ ⁻	dds	1,197	-1
ラムダ粒子 Λ ⁰	uds	1,116	0
グザイ粒子 Ξ ⁰	uss	1,315	0
グザイ粒子 Ξ ⁻	dss	1,321	-1

(注) Σ⁰ の構成の状態は $\{(sd - ds)u + (su - us)d\} / 2$

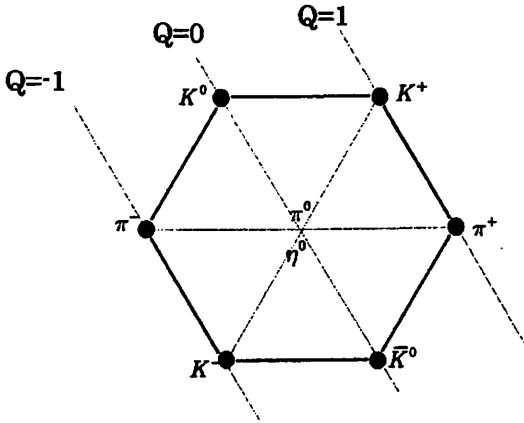
Λ⁰ の構成の状態は $\{(sd - ds)u - (su - us)d - 2(du - ud)s\} / \sqrt{12}$

中間子はクォークと反クォークの対となる粒子のメソンとして理解されるようになっていった。クォーク u, d, s と反クォーク $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ に対する南部陽一郎による $SU(3)$ の 3 次元表現の既約分解は

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

となる。

◎メソン 8 重項



◎主なメソン粒子

表 3

メソン粒子	構成	質量 MeV	電荷 Q
パイ中間子 π^+	$u\bar{d}$	140	1
パイ中間子 π^0	$(u\bar{u} - d\bar{d}) / \sqrt{2}$	135	0
パイ中間子 π^-	$d\bar{u}$	140	-1
K 中間子 K^+	$u\bar{s}$	494	1
K 中間子 K^0	$d\bar{s}$	498	0
K 中間子 K^-	$s\bar{u}$	494	-1
K 反中間子 \bar{K}^0	$s\bar{d}$	498	0
イータ中間子 η^0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) / \sqrt{6}$	548	0

反粒子 $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$ の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ、それ以外の性質は同じ

である。例えば \bar{u} は $B = -1/3, L = 0, Q = -2/3$ である。K 中間子は CP 対称性が破れることから益川・小林理論は注目されるようになっていった。

§ 4. 強い力

バリオンは 3 個のクォークからなっているが、各クォークのスピンは 1/2 である。例えば

$$\Lambda^{++} = uuu$$

のスピンは和をとって 3/2 となる。3つの同じフェルミオン u で完全に対称な基底状態 uuu とならなければならないが、これはフェルミ統計で禁止されている。南部陽一郎は新しい量子数を与える必要性を示唆し、ゲルマンらは新たな量子数にカラー荷と名付けた。クォークは色の三原色の赤(R)、緑(G)、青(B)をもつと考える。そして自然界にある素粒子はすべて色のない白色であると要請する。ラムダ粒子は

$$\Lambda^{++} = u_R u_G u_B$$

となる。反クォークの色は補色のシアン(\bar{R})、マゼンタ(\bar{G})、黄(\bar{B})である。色のない白色となるのは次の場合である。

- (1) 赤, 緑, 青が等量混ざる。(RGB)
- (2) シアン, マゼンタ, 黄が等量混ざる。($\bar{R}\bar{G}\bar{B}$)
- (3) カラーとその補色が等量混ざる。($R\bar{R}, G\bar{G}, B\bar{B}$)

量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A} + i\bar{\psi} \not{D} \psi \quad (2)$$

である。正確に書くと

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{\mu\nu A} + \sum_q \bar{\varphi}_{q,a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu^C - m_q \delta_{ab}) \varphi_{q,b}$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^A - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^A - g_s f_{ABC} \mathcal{A}_\mu^B \mathcal{A}_\nu^C$$

A, B, C は 1 から 8 までをとり、8種類のグルーオンに対応する。

カラー荷間の QCD 力を媒介するグルーオンは 8つの異なるカラーの組み合わせで与えられる。グルーオンはカラー群 $SU(3)$ の 8重項に属している。

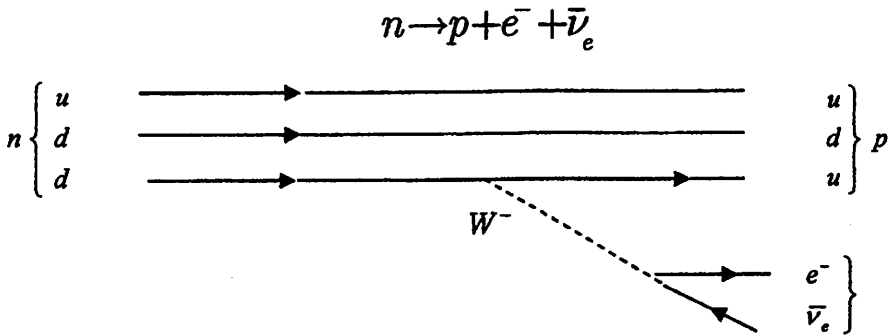
$$g_1 = R\bar{G}, g_2 = R\bar{B}, g_3 = G\bar{R}, g_4 = G\bar{B}, g_5 = B\bar{R}, g_6 = B\bar{G}$$

$$g_7 = (R\bar{R} - G\bar{G}) / \sqrt{2}, g_8 = (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}) / \sqrt{6}$$

歴史的には湯川秀樹の論文 ([Yu]) により原子核を維持する力として中間子による相互作用が予想され、中間子が後に発見され理論の正しさが証明された。その後、グルーオンによる強い力により統一的に説明されるようになっていった。

§ 5. 弱い力

弱い相互作用は荷電ベクトルボソンすなわちウィークボソン W^\pm の放出と吸収により生じる。 β 崩壊



電子 e^- と性質が同じで質量が大きい μ 粒子と τ 粒子とがある。また崩壊のときに一緒に出てくるニュートリノはそれぞれに対応して電子ニュートリノ ν_e 、 μ ニュートリノ ν_μ そして τ ニュートリノ ν_τ がある。これら軽粒子を総称してレプトンという。レプトンの反粒子 e^+ 、 $\bar{\nu}_e$ 、 $\bar{\mu}$ 、 $\bar{\nu}_\mu$ 、 $\bar{\tau}$ 、 $\bar{\nu}_\tau$ の量子数 B, L, Q は対応する粒子の符号を反転させ、それ以外の性質は同じである。例えば陽電子 e^+ の量子数は $B=0, L=-1, Q=1$ である。
光子やグルーオンのように力を伝えるゲージ粒子は本来質量が0であるが弱い力を伝えるゲージ粒子のウィークボソン W^\pm, Z^0 が大きな質量をもつことは素粒子論の大きな難題となった。

§ 6. ヒッグス場

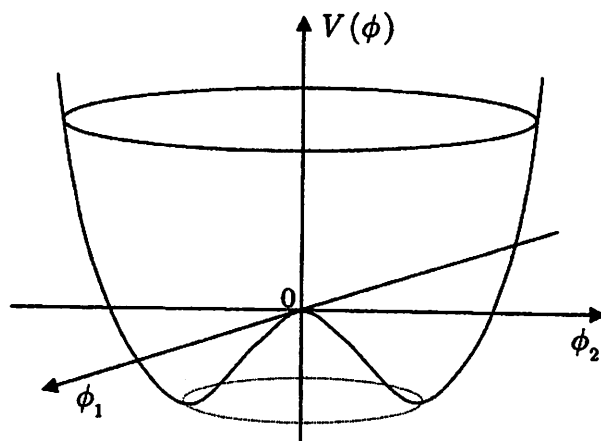
ゲージ粒子 W^\pm と Z^0 に質量を与え、光子 γ の質量は0のままであるようにヒッグス場の定式化がなされた。ヒッグス場のラグランジアン

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^* (D_\mu \phi) - V(\phi) \quad (3)$$

を $SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性を満足するように定める。ポテンシャルは

$$V(\phi) = a^2(\phi^* \phi) + |b|(\phi^* \phi)^2$$

ここで ϕ^* は粒子 ϕ のエルミート対称で反粒子を表している. $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$



ヒッグス粒子は局所対称性の自発的破れにより質量をもつゲージ粒子ウィークボソンとして姿を現すと理解されるようになった. そしてワインバーグが予想したように 1983 年には 80GeV と 91GeV 近くでウィークボソン W^\pm, Z^0 がそれぞれ確認された. そこで元になるヒッグス粒子は確実に発見できると世界は確信をもったのである. そして加速器による粒子衝突のエネルギーを上げてヒッグス粒子を発見しようと世界はしのぎを削っていった. こうした努力の末にヒッグ粒子は 125GeV で発見され 2013 年の国際会議で認定された. こうして物質の質量はヒグッス場との相互作用により獲得されると理解されるようになったのである.

表 4

ゲージボソン	スピン	質量 GeV	電荷 Q
光子 γ	1	0	0
W^\pm, Z^0	1	$W^\pm : 80, Z^0 : 91$	$\pm 1, 0$
グルーオン g_1, \dots, g_8	1	0	0

§ 7. 今後の課題

ゲージ対称性から標準理論へと歴史を追ってきた。表現論の立場から理論を検証して貢献できる土壌が整ってきた印象である。問題として挙げてみよう

問題 1. 光子 γ から電子と陽電子が対で発生する反応

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

は最も基本となる反応である。質量や電荷をもたないエネルギーだけの光子 γ から電子と陽電子が生まれ質量と電荷が発生している。この反応を表現論の立場から見直し標準理論を補えないか。

この間から次の問題も自然に生まれる。

問題 2. 上の反応では電磁波から粒子が生れている。そこで電磁波を弦理論や超弦理論における弦と見なすことにより、標準理論を正確に捉えることが出来るのではないか。

超弦理論と標準理論は大きく乖離している状況にある。このような基本となる反応から弦理論を見直すのは良い方向と言えるのではないか。

文献

[Di]P.A.M. Dirac, The quantum theory of the electron, Proceedings of the Royal Society Bd.117, 1928, S.610, Bd.118, S.351 (Diracgleichung, spin)

[HM]F.Halzen, A.D.Martin, Quarks & Lepton -An introduction course in modern particle physics-, John Wiley & Sons,1984.

[HN]M.Y. Han, Y. Nambu, Three-Triplet Model with Double SU(3) Symmetry, Physical Review, vol. 139 N.4B(1965).

[P]Particle data group, Particle physics booklet 2016.

[SO]佐野茂, 大野成義

素粒子論と表現論, 表現論シンポジウム講演集 2009

[w]S.Weinberg, Recent Progress in the Gauge Theories of the Weak, Electromagnetic and Strong Interactions. Rev. Mod. Phys. 46, 255 (1974).

[Yu]H.Yukawa, On the interaction of elementary particles. I., Proceedings of Phys.-Math. Society of Japan 1934.