第29回数学史シンポジウム

劉徽の句股術の解釈について

大阪産業大学　全学教育機構
田村　誠

『九章算術』第九章「句股章」および『海島算経』は句股術、すなわち ピタゴラスの定理を用いるものである。劉徽による解法では、長方形の面積を用いた説明と相似を用いた説明とがされており、前者はユークリッド『原論』第1巻の命題43と同等の事実を基礎におき、長方形の面積を用いた議論で説明しようとする。また、後者は前者の議論を踏まえて直角を挟む辺が平行な三角形同士についてのみ扱っている。

一方、近年発見された岳麓書院蔵秦簡『数』には『九章算術』九巻句股章算題［九］とほぼ同じ算題が含まれ、それゆえピタゴラスの定理の理解が秦代以前にまで遡る根拠となるとされている。これに対し、開平方の不存在を理由にピタゴラスの定理の理解に疑義を投げかけ、相似による解法の可能性を示唆した。ここでは劉徽による説明を踏まえ、指摘した相似による解法が正当ではなかったことを述べたい。

１．『九章算術』の成書時期について

『九章算術』の現存する最古のテキストは、上海図書館所蔵の南宋本で、影印が1981年文物出版社から『宋刻算経六種』として出版されている。ただ残念ながら、ここには第五章の商功章までしか残されておらず、第六章以降は清代に復されたものを見る他ない。南宋本には『九章算術』本文、劉徽注、李淳風注が記されている。劉徽が『九章算術』をまとめ直し、注釈を付けたのは三国魏の263年とされている。李淳風は唐の人である。

『九章算術』の成書について、その名称が文献に見える最も早

いものは、『後漢書』馬援伝に載る、援の子、続の伝記の中においてである。また出土資料としては、光和2年（179年）に製作された「大司農斛」の銘文中にその名が見える。また『九章算術』は『漢書』芸文志にその名が見えないことから、従来、後漢前期がその成書時期であると考えられてきた。近年、この成書時期を前漢あるいは先秦まで押し上げようとする向きもある。我々は岳麓書院蔵秦簡『数』や張家山漢簡『算数書』との比較によってそれには否定的である。共通する算題などから、それらが『九章算術』の源流の一部であるとは考えられるが、全体像としては質的な差は大きく、その差を埋めるような史料は見つかっていないからである。

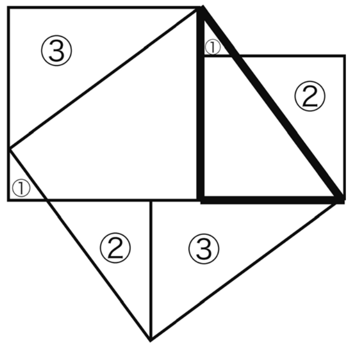
２．ピタゴラスの定理について劉徽の理解

『九章算術』第九章「句股章」および『海島算経』は句股術、すなわち ピタゴラスの定理を用いるものである。ピタゴラスの定理は『周髀算経』にも一部述べられている。それについては、いくつかのピタゴラス数を知っていただけとする説と一般的法則を知っていたとする説があるようである。『九章算術』では、ピタゴラスの定理は「術」としてその内容が述べられている。すなわち直角三角形の3辺を短いものから句・股・弦として、

弦$=\sqrt{\text{句}^2+\text{股}^2}$ などである。『数』には開平方は見られず、『算数書』で開平方の近似計算 $\sqrt{240} \fallingdotseq 15\frac{15}{31}$ が見られるだけなので、ここではひとまずピタゴラスの定理の一般的法則は『算数書』から『九章算術』に至る間に獲得されたとしておきたい。少なくとも言えることは、劉徽に至ってはピタゴラスの定理を自由に利用していたということである。

『九章算術』第九巻句股章の算題［一］～［三］の劉徽注[3]は、次のように述べる。

[3] 句自乘爲朱方、股自乘爲青方、令出入相補、各從其類因就其餘不移動也。合成弦方之冪、開方除之、即弦也。



句は自乗して朱方と為し、股は自乗して青方と為し、出入して相補い、各おの其の類従り因りて其の余の移動せざるに就かしむる也。合わせて弦方の冪を成し、開方して之を除せば、即ち弦也。

清の李鋭の復元とする郭書春の説では、「出入相補」とは図のような三角形の切り貼りを表しているという。この説の是非は別にしても、算題［五］に付けられた劉注[7]では、次のような理解を見せている。

(前略) **句與股求弦、亦如前圖。句三自乘爲朱冪、股四自乘爲青冪、合朱・青、得二十五、爲弦五自乘冪。出上第一圖、句・股冪合爲弦冪、明矣。**

然二冪之數謂倒互於弦冪之中而已、可更相表裏。居裏者則成方冪、其居表者則成矩冪。二冪表裏形詭而數均。

又按此圖、句冪之矩朱、巻居表。是其冪以股・弦差爲廣、股・弦幷**爲袤、而股冪方其裏。股冪之矩青、巻居表、是其冪以句・弦差爲廣、句・弦**幷**爲袤、而句冪方其裏。是故差之與**幷**用除之、短長互相乘也**

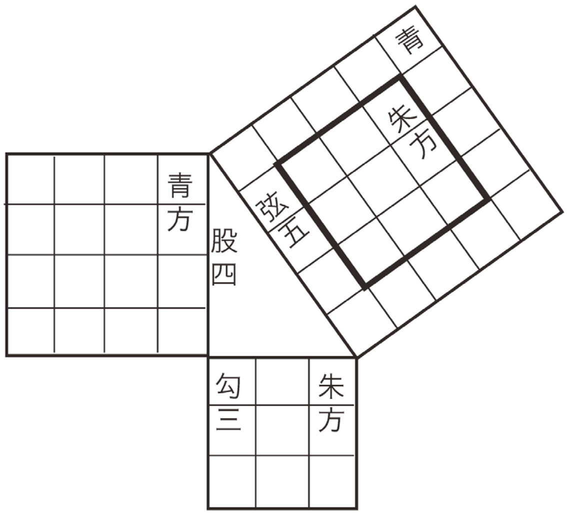
　句と股ともて弦を求むるは、亦た前図の如し。句三は自乗して朱冪と為し、股四は自乗して青冪と為し、朱・青を合わせて二十五を得、弦五の自乗の冪と為す。上の第一図を出づるも、句・股の冪は合して弦冪と為ること明らけし。

　然れども二冪の数は弦冪の中に倒互するのみにして、更々相表裏すべしと謂う。裏に居る者は則ち方冪を成し、其れ表に居る者は則ち矩冪を成す。二冪の表裏は形詭（ことな）るも数は均し。

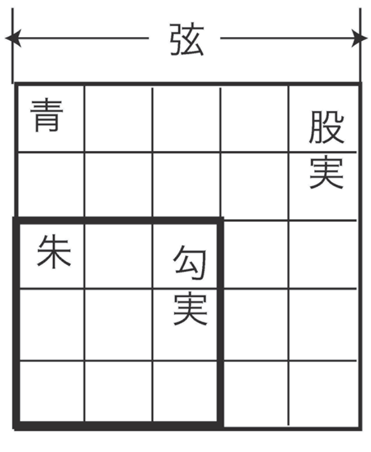
　又此の図を按ずるに、句冪の矩は朱にして、巻きて表に居る。是れ其の冪は股・弦の差を以て広と為し、股・弦の并を袤と為し、而

して股冪は其の裏に方たり。股冪の矩は青にして、巻きて表に居る。是れ其の冪は句・弦の差を以て広と為し、句・弦の并を袤と為し、而して句冪は其の裏に方たり。是の故に差と并は用いて之を除し、短・長互いに相乗ずる也。

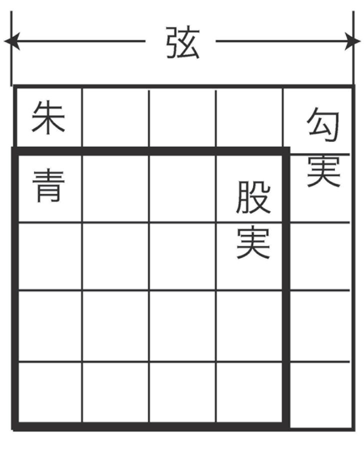
「此の図」とは「股実之矩図」「句実之矩図」のこと、『周髀算経』の趙君卿（後漢）の句股方円図註に基づく戴震の推定図によれば下図の通りである。



句股弦互求図



股実之矩図

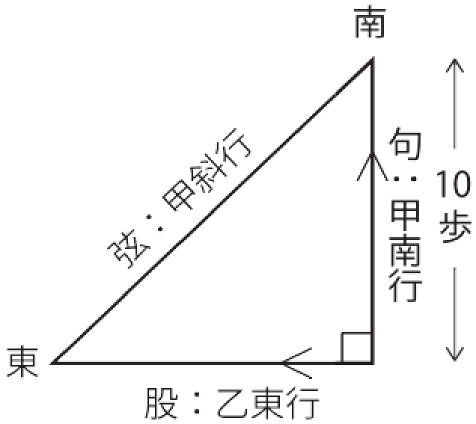


句実之矩図

劉徽は、まず 句^2＋股^2＝弦^2 は明らかであり、したがって真ん中の「股実之矩図」であれば、青と書かれた L 字型の面積は股^{2}に等

しいと、そしてこの L 字型を切り貼りして長方形にすると、その短辺（広）は弦－句であり、長辺（袤）は句＋弦 となり、
$\text{股}^2=(\text{弦}-\text{句})(\text{句}+\text{弦})$ であると述べている。

３．面積を用いた説明



劉徽は、句股章の多くの算題について、面積を用いて問題を表現し、上で述べた $\text{句}^2=(\text{弦}-\text{股})(\text{股}+\text{弦})$ などの関係を用いて解法を説明する。算題［一四］は、「速さ 3 の乙は東に行き（股)、速さ 7 の甲は南に 10 歩行ってから（句）東北方向へ斜めに向かう（弦）と乙に会うとき、弦と股はどれだけか」というものである。

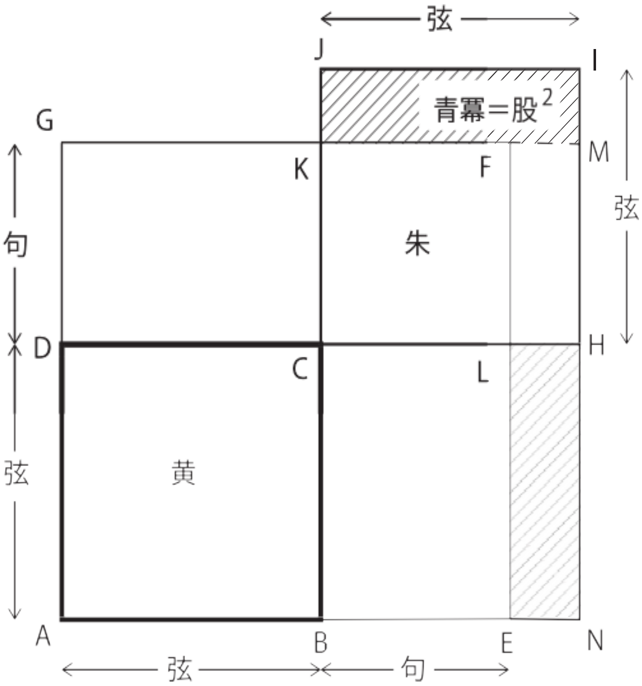
［一四］今有二人同所立。甲行率七、乙行率三。乙東行、甲南行十歩而邪東北與乙會。問、甲・乙行各幾行。
答曰、乙東行十歩半、甲斜行十四歩半及之。
術曰、令七自乗、三亦自乗、并而半之、以爲甲邪行率。邪行率減於七自乘、餘爲南行率。以三乘七爲乙東行率。置南行十步、以甲邪行率乘之、副置十步、以乙東行率乘之、各自爲實。實如南行率而一、各得行數。

今二人立つ所を同じくする有り。甲の行率は七、乙の行率は三。乙は東に行き、甲は南に行くこと十歩にして東北に邪めすれば乙と会う。問う、甲・乙の行くこと各おの幾行か。

答えに曰う、乙の東に行くこと十歩半、甲の斜めに行くこと十四歩半にして之に及ぶ。

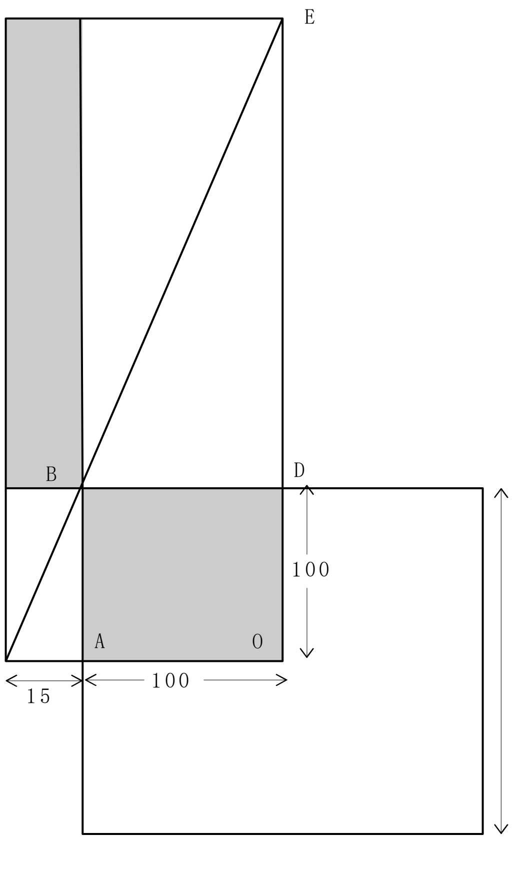
術に曰う、七をして自乗せしめ、三もまた自乗せしめ、併せて之を半にし、以て甲の邪行率と為す。邪行率は七の自乗より減じ、余は南行率と為す。三を以て七に乗ずるを乙の東行率と為す。南行十歩を置き、甲の邪行率を以て之に乗じ、副に十歩を置きて、乙の東行率を以て之に乗じ、各自を実と為す。実、南行率の如くして一とすれば、各おの行数を得。

これについて、劉注[34]では次のように説明する。句・股・弦の率を、それぞれを一辺とし、他辺を句弦和とする長方形の面積で表した比で求めるため、右のような図を考える。まず、長方形GANMの面積は弦率GABKの2倍の $2\times$弦$\times$句弦和である。一方、L字型JKFLHIの面積は長方形FENMに等しいので、長方形GANMの



面積は正方形GAEFと長方形FENMの和、句弦和^2＋股^2 に等しいこともわかる。したがって句弦和 $=7$ ，股 $=3$ とおくと、

$2\times$弦$\times$句弦和 $=$ 句弦和^2＋股^{2}より、



$$弦率＝弦\times句弦和=\frac{句弦和^2+股^2}{2}=29$$

となる。

句率は長方形KBEFの面積なので

$$句率＝句\times句弦和＝弦率-股^2$$
$$=29-3^2=20\ ,$$

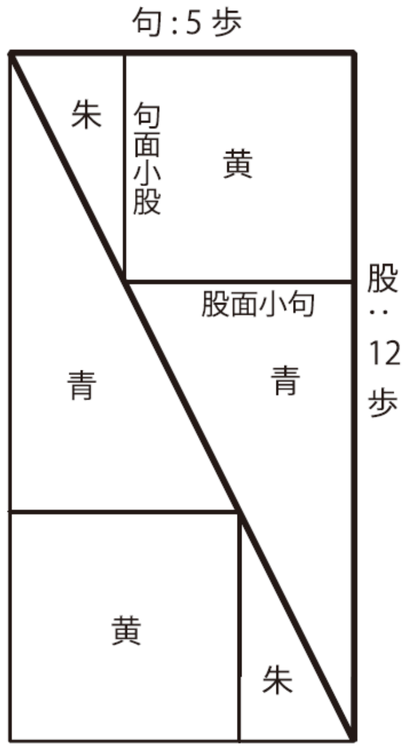
また 股率は股$\times$句弦和＝$3\times7=21$ である。

この算題以外でも、多くの算題で劉徽は長方形の面積を用いて解釈していたと思われる。句股章の算題［一七］～［二四］では測量問題として測る場所は異なるが、同じような図形を扱っている。算題［一七］に付いた劉注[30]では

「正合半邑方自乘者、股率當乘見句」とあるが、これは図の右下の斜線部の正方形の面積が、左上の斜線部の長方形の面積に等しいということを述べたもので、ユークリッド『原論』の第1巻命題43に相当する内容である。

４．相似による説明

面積を用いた解法の一方で、劉徽は相似による解法についても述べている。算題［一五］の劉注[27]では次のようにいう。



（前略）**冪圖方在句中、則方之兩廉各自成小句股。而其相與之勢不失本率也**。（後略）
冪図に方は句中に在れば則ち方の両廉、各自小句股を成す。而して其の相与の勢は本率を失わざる也。

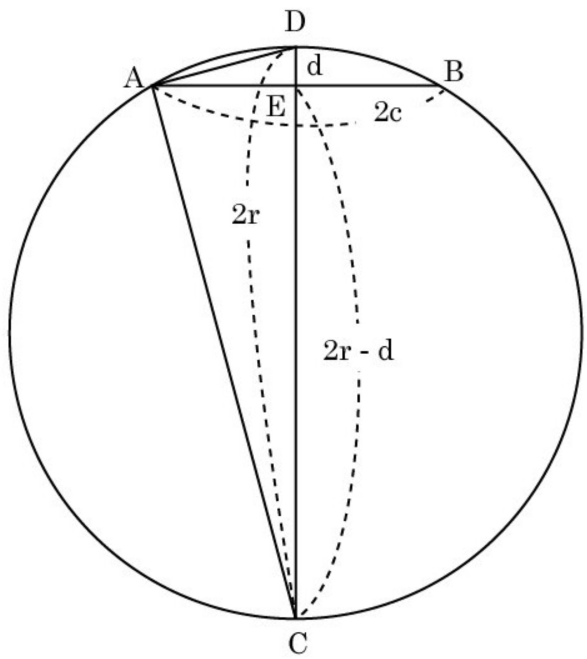
ここでは、黄の正方形に隣接する朱・青の直角三角形の辺を小股・小句と呼んでいる。「句面小股」であれば大きい直角三角形の句に接する小さい直角三角形（朱）の股辺という意味である。「相与の勢」は辺の比率。図の右上の直角三角形から正方形を除くと、小さな直角三角形が 2 つできる。これらは元の直角三角形と相似であり、辺の比が同じになっているということを述べている。

ただし、この解法は『九章算術』本文の術にある解法とは大きく異なっている。また「今有之」の語は、南宋本すなわち第一章～第五章では劉徽注に見えないが、劉徽注と李淳風注が入り乱れた後半では劉注にも現れ、その今有術の用語を用いて説明している点を考えると李注の可能性も疑われる。

とはいうものの、劉徽が相似を知らなかったということではない。実際、劉徽の著作である『海島算経』の最後の算題［九］では弦（斜辺）の比を用いており、3で述べたユークリッド『原論』の第1巻命題43を用いただけでは求めることができない。劉徽は相似も用いていたといえる。

5．岳麓書院蔵秦簡『数』の算題について

近年発見された岳麓書院蔵秦簡『数』には、『九章算術』九巻句股章算題［九］にほぼ同じ算題が含まれている。これは図のAB ＝ 2c とDE＝d より円の直径DCを求めるという問題である。



この事実を元に、[3]では「周秦交替期の人々がすでに勾股術の一般定義を把握していたことを物語る」可能性を指摘する。それに対し、[5]では右図の三角形AEDと三角形CEAの相似を用いる解法を提示して、[3]に否定的見解を示した。それは[6]にも反映し、 [6]の書評である[10]でも取り上げていただいた。

しかし、『九章算術』句股章と『海島算経』を通覧すると、相似な三角形はすべて直角三角形で、斜辺以外に平行辺を持つ組のみであった。[5]で提示した解法は、その平行辺がないという点で適切なものではない。[5]で提示した相似による解法をここに撤回したい。

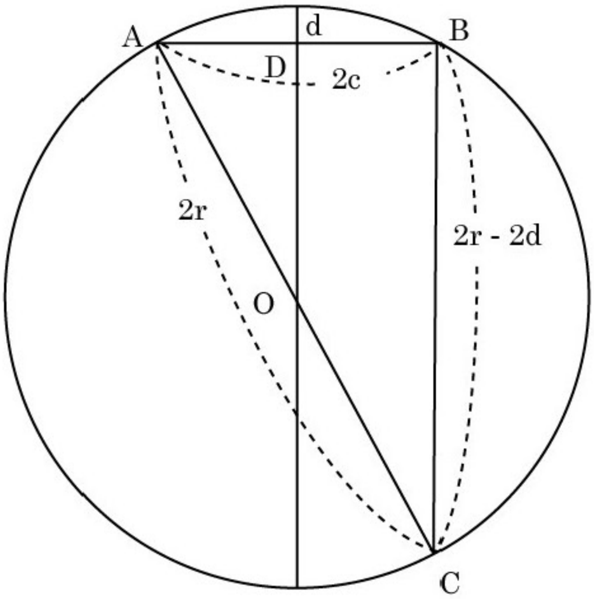
『数』では、他の算題と同様に、計算法として

$2r = \frac{c^2}{d} + d$ が述べられている

るだけで解法の説明はない。これを劉徽注に従って解釈すると、右の図の三角形OADについて考えて、句

冪之矩図より股弦和 $= \frac{\text{句}^2}{\text{股弦差}}$

で、この両辺に股弦差を足せば



$2 \times \text{弦} = \frac{\text{句}^2}{\text{股弦差}} + \text{股弦差}$ すなわち $2r = \frac{c^2}{d} + d$ が得られる。

「句股術の一般定義」が、ピタゴラスの定理弦^2＝句^2＋股^{2}の知識だけを指すのであれば、秦代に遡る可能性はある。『数』の算題は、句^2＝股弦和×股弦差 のような適用がかなり自由にできていたことを示唆している。しかし、『九章算術』句股章冒頭にあるような、開平方を含む 弦$=\sqrt{\text{句}^2+\text{股}^2}$としての適用であれば懐疑的にならざるを得ない。前漢の『算数書』では平方根の近似計算を比例配分によって行っていたからである。『九章算術』の成書時期までも遡らせるものではないと考える。

参考文献

[1] 川原秀城「劉徽註九章算術」(『中国天文学・数学集』所収、1980年 11 月)

[2] Shen, Kang-Shen, Crossley, John N., Lun, Anthony W. C. 『The Nine Chapters on the Mathematical Art：Companion and Commentary』(Oxford Univ. Press, 1999)

[3] 朱漢民・蕭燦「従岳麓書院蔵秦簡『数』看周秦之際的幾何学成就」中國史研究（2009 年第 3 期）邦訳を[5]に所収

[4] 郭書春『九章算術訳注』（上海古籍出版社、2009年12月）
[5]新たに出現した二つの古算書—『数』と『算術』（付）岳麓書院蔵秦簡『数』から見た周秦交替期の幾何学的成就　大阪産業大学論集　人文・社会科学編 9 号（2010 年 6 月） http://id.nii.ac.jp/1338/00001029/
[6] 中国古算書研究会編『岳麓書院蔵秦簡『数』訳注－秦漢出土古算書訳注叢書（2）－』（朋友書店、2016年11月）
[7] 大川俊隆『九章算術』訳注稿（29）大阪産業大学論集　人文・社会科学編31号（2017年10月）http://id.nii.ac.jp/1338/00001929/
[8] 大川俊隆・田村誠『九章算術』訳注稿（30）大阪産業大学論集　人文・社会科学編 32 号（2018 年 2 月） http://id.nii.ac.jp/1338/00001978/
[9] 田村誠『九章算術』訳注稿（31）大阪産業大学論集　人文・社会科学編33号（2018年6月）http://id.nii.ac.jp/1338/00002024/
[10] 上野健爾「中国古算書研究会編『岳麓書院蔵秦簡『数』訳注』」数学文化 No. 29 （日本評論社、2018年2月）