

関数論のデデキントへの影響 (1)*

赤堀庸子[†]

2019.11.10

序

リヒャルト・デデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831-1916) の数学思想に影響を与えた数学者の一人として、リーマン (Bernhard Riemann, 1826-1866) の存在がある。ゲッティンゲン大学時代の偉大な先輩から大いに影響を受けたであろうことは容易に想像されるが、それがどのようなものであるかは、必ずしも十分に知られているとはいえないようである。

もちろん、リーマンの仕事の性質上、これは非常に困難な仕事である。もとより、リーマンの著作は、内容豊富で、時代をあまりにも先取りしているため、決して読みやすいものではない。さらにその影響となると、想像するしかない部分もあり、単純明快な解説というわけにはいかないところではある。

まずはとりあえず、数学史界で知られていることなど、基本情報を整理しておきたい。

そして、リーマンの幾何学的思考の意義について、若干考えてみたい。

1 状況

1.1 リーマンとデデキントの直接の関係

ここでリーマンとデデキントにかかわる事柄を時系列で整理しておこう。([19]も参照)

1846 リーマン：ゲッティンゲン大学に入学。

1847 リーマン：ベルリン大学に移る。

ヤコビ、ディリクレの授業に参加。アイゼンシュタインと交流。

*津田塾大学数学史シンポジウム

[†]<http://erkym.starfree.jp/>,
ykaka1964@akane.waseda.jp

<https://sites.google.com/view/erkymjp/>,

- 1849 リーマン：ベルリン大学から帰る。
- 1850 デデキント：ゲッティンゲン大学に入学。
- 1851 リーマン：学位論文「一変数複素関数論の基礎」 ([10])¹
- 1852 デデキント：学位論文「オイラー積分について」 ([1])
- 1854 リーマン：6月に教授資格講演「幾何学の基礎にある仮説について」 ([11])
 デデキント：6月に教授資格講演「数学に新しい関数を導入することについて」 ([2])
- 1854/55 リーマン、デデキント：私講師として講義を開始。
- 1855 ディリクレがゲッティンゲン大学に赴任。
- 1855/56 リーマン：アーベル関数講義（デデキント参加）
- 1856 アーベル関数講義つづき（関数論の講義は、この後毎年行っているようである。）ノイエンシュヴァンダーが講義録を出版しているようである。 ([23], p.80.)
- 1856/57 デデキント：代数学講義（ガロア理論） ([7])
- 1857 リーマン：アーベル関数の論文を提出（クレレ誌） ([12])
 ハルツブルク（デデキント家の別荘）で静養。
- 1857/58 デデキント：代数学講義（ガロア理論）
- 1858 デデキント：チューリッヒ TH へ。「切断」のアイデアを同僚 Durège に語る。
- 1859 リーマン：ベルリンアカデミー通信会員になる。デデキントを伴ってベルリン旅行。クンマー、ボルヒャルト、クロネッカー、ヴァイエルシュトラスと交流。
- 1866 リーマン死去。リーマン夫人よりデデキントに原稿が託される。
- 1872 クレプシュが全集の編集に加わるが、11月に急死。
- 1874 H. ヴェーバーが全集の編集に加わる。
- 1876 リーマン全集出版。
- 1892 リーマン全集第2版出版。 ([13])²

デデキントが1850年にゲッティンゲンに入学したとき、当大学は数学者を育てるような環境にははなかった。（ガウスはほとんど教育に参加していなかった。）転機が訪れたのは1855年にガウスの後任としてディリクレが赴任したときであった。このときから1858年にチューリッヒ TH に赴任するまでの4年間で、学ぶ立場のデデキントの黄金期であったといえる。

デデキントはディリクレに会う以前に、彼の論文を読んではいたが、日々ディリクレと公私をともにすることで、「まったく新しい人間になった」と回想している。研究者としての自覚がそなわったといってもよいだろうか。ディリクレの優れた指導力は、多くの数学者たちを輩出するのに寄与をしたと、数学史家からも指摘されている。

¹2019年に [21] が刊行された。

²この後、1902年に、講義録その他が付加された版が、1990年に、関連資料や文献表が付加された版が出版される。（ [14], [15]）

そしてこの時期、デデキントはリーマンのアーベル関数の講義（1855–56年冬学期、1856年夏学期）に出席した。これがきっかけで親交が深まったとデデキントは言っている。（実際の出会いはもう少し前であるはずだが、リーマンがあまり社会的とはいえない性格であることを考えると、講義に参加したことが大きかったのであろう。）

1.2 リーマンの論文

リーマンの関数論の論文は二つある。

リーマンは1851年の学位論文は、いわゆるリーマン面の導入が主要なテーマであるが、豊富な内容を含んでいる。

まず複素関数とその微分に関する基礎概念を述べた後、リーマン面の概念を導入した。次に、リーマン面の（現在でいう）位相的性質（連結度の概念）を導入し、リーマン面を特徴づけた。そして、リーマン面上の積分、調和関数に関する考察が続き、ディリクレの原理に基づいてリーマン面上に解析関数を構成する。

1857年のアーベル関数の論文は全4編からなり、はじめの3編は学位論文の内容を解説している。（学位論文そのものよりも、分かりやすくなっている。）1855/56冬学期、1856夏学期の講義が1857年の論文の内容と重なることから、デデキントはおそらく学位論文の内容に相当するものをこの機会に知ったものと考えられる。

ちなみに、デデキントの代数学講義には、リーマンの名が登場してくる箇所がある。そこでは1857年の用語ではなく、1851年の用語が使用されている。（[7], p.）（用語「分岐点」は、1851年では Windungspunkt, 1857年では Verzweigungspunkt が使用されているが、デデキントは Windungspunkt を使っている。）

1.3 デデキントと関数論のかかわり

ここで、デデキントと関数論とのかかわりを整理しておく。

周知のようにデデキントの主たる専攻は整数論であり、関数論との縁は薄いように思われるかもしれない。しかし実は、1852年の学位論文でオイラー積分を扱っている。当時多くの数学者が取り組んでいた楕円関数まわりの研究に、一通りの関心を持っていたといえる。

論文の初めにデデキントが研究の意義を述べている箇所が興味深い。（[1], p.1.）

間接的演算（逆演算）を導入すると、困難に直面することとなるのはよく知られていることである。しかしこの一見不幸な状況が、数学の発展には却って好都合にはたらくということが、常々起こってきたのである、とデデキントは冒頭で述べる。それは数学に新しい分野を切り開いてきたたとえば数の場合、減法、除法、累乗計算などの逆演算が負の数、分数、虚数といった概念を生み出し、これが数学の領域を際立って広げてきた。それと同様な事情が高等解析にもある、と

デデキントは言う。微分演算は関数の理論を発展させたが、関数の概念が拡大することはない。積分によって、初等関数では表されないような関数が得られ、それらこそが関数概念の拡大に寄与するのである。こうした積分研究の一環として、オイラー積分をテーマとする旨が述べられるというわけである。

1854年の教授資格講演においては、こうした「概念の拡大」がさらに一般的に述べられている。ガウス、ヴェーバーのほかは哲学部の教授が聴衆であることから、講演の数学の水準は抑制されて、数概念の拡大の話が中心となっているが、これはまさしく後の仕事を思わせるものである。「概念の創造」は、デデキントの一生を貫くテーマであり、その萌芽がここにみられるとあってよいであろう。

講演をおこなったのは、デデキントがディリクレ、リーマンに出会う直前であった。リーマンの講義は、まさしく概念の創造にあたるものであり、これはデデキントに深い影響を与えたに違いないといえるだろう。

ちなみにもうひとつ、チューリッヒ時代の同僚の Durège は、実は楕円関数論、関数論の教科書の著者でもあった。授業の準備に追われる多忙な日々の中でも、関数論はデデキントと近いところにあったとあってよいだろう。そして、後に自身も関数論の著作を（二つであるが）出すことになる。（[3], [4]）

2 リーマンの関数論の意義

2.1 リーマンの関数論における幾何学的アプローチ

リーマンの学位論文はリーマン面の概念の創設が主題であることは当然だが、それ以前にまず写像の概念の導入が大きなポイントになっていることに注意をしなければならない。

実変数関数と複素変数関数とは、数式表現にとどまる限りは、さほどの違いはないようにみえる。しかし、実変数（一変数）関数 $y = f(x)$ のグラフにあたるものを複素変数関数 $w = f(z)$ で考察しようとする、とたんに行き詰まる。ガウスの複素数平面を受け入れれば、 z と w をそれぞれとらえることは出来るが、（これによって積分への理解は深まる）対応しているところそのものを図に表すことは、我々の3次元世界では出来ない。こうした状況において、「対応そのもの」すなわち写像の概念を導入するということは、いずれどこかで必ず求められることではあったに違いない。

そのためには、幾何学的アプローチを行うことを受容と、抽象的な思考の力の双方が必要となる。これは、現代の我々が想像するより、容易なことではないだろう。

ヴァシングはその『抽象群論概念の歴史』（[18]）において、群論には幾何学における変換群、代数方程式論（ガロア理論）、抽象的な群論 (British Algebra) の3つの流れがあり、それらが統合することによって、抽象群論が形成されると述べた。複素関数論の基礎の歴史もそれと似て、幾何学的思考と抽象的思考、そして

それらの統合が重要な役割を果たすといえる。これは本来大きな規模の話であると思われる。

しかしリーマンの頭の中には、この双方が自然に備わっていたように思われる。先人としては、もちろんガウスの複素数平面論、曲面論、そしてリスティング（物理学者）のトポロジー論、さらに古くはライプニッツの位置解析があるが、それにしてもリーマンの仕事はそれらをふまえて、そこから何歩も先に進んでいるのである。

ここで、19世紀当時に幾何学的アプローチをとることの意義を今一度ふりかえっておこう。

現代の数学は集合論に基づいた基礎に支えられ、その上に代数学、幾何学、解析学という分野が存在するというのが共通の理解であろう。現代の数学者が幾何学的アプローチを用いたとしても、それは単なる好みの問題にすぎないと考えられるであろう。

しかし、19世紀以前は、事情が異なっていたことに注意しなければならない。解析的、算術的、幾何学的、という用語の意味合いは、その指し示す範囲、機能などが現在と異なっているということに、我々はよくよく注意しなければならない。

そもそもまず、「解析」という用語の歴史的意味合いがなかなか厄介である。「解析」は西欧思想史においては、「総合」と対で使われるもので、古代においては、「証明（総合）の逆（発見的方法）」を表していた。近代になって、これが転じて記号代数を利用した計算を指し示す用語になった。

17世紀から19世紀初頭にいたるまで、「解析」は、近代数学記号法を利用する計算的数学の総称として、しばしば「代数」と同義に用いられてきたものである。([22], p.272.)

上記引用で「計算的数学の総称」とあるように、「解析」の範囲は広く、「数学」とほとんど同義ではないかと思われるような言明に遭遇することがある。

ところで、「解析」が数学とほぼ同義ということは、幾何学の数学における位置づけが微妙になるということでもある。極端な話、幾何学は数学のうちに含まれないのではないかということになる。実は、19世紀ドイツの Technische Hochschule においては、数学のポストのほかに、幾何学のポストが存在した。そして、「解析」の基礎は、幾何学的直観にもとづいてはならない、という考え方が多くの数学者たちの間で広く共有されていたのである。（デデキントもそうした数学者の一人である。）

このような中で、幾何学的アプローチを積極的に試みたリーマンの立場は、かなり異質といえるということが分かる。

ただ、論文の言説を見る限り、趨勢に抗うという気負いがあるようにもみられない。もちろん、ガウス、リスティング、さらにライプニッツといった先達がリーマンの思いを支えていたことはあるだろうが、それにしてもごく自然に、自分の思

うところをさらりと述べていくというような調子には驚かされる。これは、リーマンの天才性としかいえないのであろう。

2.2 デデキントの立場

デデキントが、幾何学的アプローチを容認していないことはすでに述べたが、いくつか情報を補足しておく。

ガウスの複素数平面に対する意見といえそうなものが、1854年の就職講演にある。そこでは、「複素数の満足できる基礎づけはまだないか、出版されていない。」と述べられている。([2], p.434.)

しかし、晩年に書かれたガウスの講義に対する回想では、虚数の幾何学的表現には深い印象を覚えた、とも述べている。([5], p.293.)

1874年のヴェーバーへの書簡では、「私はリーマンの仕事を信じているが、まだ完全に習得したとは言えません。数論並みの厳密さであいまいなどを克服しなければ、完全に習得したとはいえないのではないかと思います。」といった趣旨のことを述べている。([9], p.78.)

数学を記述する際の規範として、幾何学的直観によるものは決して認められない、とするデデキントの立場は一貫しているようである。ただ他方で、リーマンの仕事を「信じる」気持ちもある、ということなのだろう。(ガウスの複素数平面についても同様の気持ちがあるのかもしれない。)

この二つのせめぎあいというのは、なかなかの難題であろう。この葛藤を乗り越える道として、集合論的思考の導入があったのではないかと、筆者は考えている。

2.3 私見

これは筆者のまったく個人的な感想であるが、横断線によって連結度を定義していくあたりは、どこことなくデデキントの「切断」と似ているように思われた。(もちろん、両者の数学的意味は、まったく異なるものであるが。)

筆者は以前から、『連続性と無理数』は、「解析学の厳密化」に成功した著作であると同時に、集合論的思考による理論の創設に成功した著作、という印象をもっている。今回リーマンの学位論文に触れて、同作は、リーマンの思考世界を、デデキントのもっていた厳密性の規範にかなう形で理論化したものではないかとの印象が加わった。

もちろん、デデキント本人の意識にあるのは、序文に主張されている通り「解析学の厳密化」ではあろうが、頭の片隅に、あるいは無意識に、リーマンの横断線があったとしても不思議ではないと思う。

おわりに

率直に言って、仕事はまだ緒に就いたばかりである。とにかくリーマンの仕事は、深く、広く、とてつもないものだと感じた。デデキントはこれらの仕事に触れ、また10年もの月日をかけてこれらを読み解くことで、自らの仕事を深く、広いものにしていったのだろう。

参考文献

- [1] R.Dedekind, “Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale”, Dissertation(1852), Göttingen, in *Werke* I, pp.1–26.
- [2] R.Dedekind, “Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik”, Habilitationsschrift(1854), Göttingen, in *Werke* III, pp.428–438.
- [3] R.Dedekind, “Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen”, *Crelle* **83**(1877), in *Werke* I, pp.174–201.
- [4] R.Dedekind and H.Weber, “Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen”, *Crelle* **92**(1880), in *Werke* I, pp.238–350.
- [5] R.Dedekind, “Gauss in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate”, in *Werke* II, pp.293–306. (1901).
- [6] R.Fricke, E.Noether and O.Ore ed., *Richard Dedekind: Gesammelte Mathematische Werke*, I–III. (Vieweg, 1930–1932 ; Chelsea, 1969).
- [7] R. Dedekind, “Eine Vorlesung über Algebra”, in W.Scharlau ed., *Richard Dedekind 1831–1981*, (Vieweg,1981). pp.59–100.
- [8] Pierre Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques* (Vrin, 1976).
- [9] José Ferreirós, *Labyrinth of Thought: a history of set theory and its role in modern mathematics* (Birkhäuser, 1999).
- [10] B.Riemann, “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grössen”, Dissertation(1851), Göttingen, in *Werke*, pp.3–45.; 笠原乾吉訳「複素一変数関数の一般論の基礎」, 足立他編訳『リーマン論文集』(朝倉書店, 2004), pp.1–33.

- [11] B.Riemann, “Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”, Habilitationsschrift(1854), Göttingen, in *Werke*, pp.272–287.; 山本敦之訳「幾何学の基礎にある仮説について」, 足立他編訳『リーマン論文集』(朝倉書店, 2004), pp.295–307.
- [12] B.Riemann, “Theorie der Abel’schen Functionen”, *Crelle* **54**(1857), in *Werke*, pp.88–144.; 高瀬正仁訳「アーベル関数の理論」, 足立他編訳『リーマン論文集』(朝倉書店, 2004), pp.71–123.
- [13] R.Dedekind and H.Weber ed., *Bernhard Riemann : Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass* (Teubner, 1876,1892).
- [14] M.Noether and W.Wirtinger ed., *Bernhard Riemann : Gesammelte Mathematische Werke. Nachträge* (Teubner, 1902).
- [15] R.Narasimhan ed., *Bernhard Riemann : Gesammelte Mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass und Nachträge. Collected Papers*, (Springer/Teubner, 1990).
- [16] W.Scharlau ed., *Richard Dedekind 1831–1981* (Vieweg, 1981).
- [17] W.Scharlau ed., *Mathematische Institute in Deutschland 1800–1945*, (Friedr. Vieweg&Sohn, 1990).
- [18] H.Wussing, *The Genesis of the Abstract Group Concept* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969): English trans.(MIT Press,1984).
- [19] 赤堀庸子「デデキントの生涯 (1)」『第 26 回数学史シンポジウム (2015)』(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 37, 2016) pp.107–114.
- [20] 足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳『リーマン論文集』(朝倉書店, 2004).
- [21] 高瀬正仁『リーマンに学ぶ複素関数論– 1 変数複素解析の源流–』(現代数学社, 2019).
- [22] 長岡亮介「解説 (任意関数の三角級数表現の可能性について)」足立他編訳, 『リーマン論文集』(朝倉書店, 2004) pp.270–276.
- [23] D. ラウグヴィッツ (山本敦之訳)『リーマン』(シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998) ; trans.from Detlef Laugwitz, *Bernhard Riemann: 1826-1866* (Birkhäuser, 1996).