

## 「エウクレイデス「原論」に素因数分解は書かれているか？」

三富 照久 (中央大学文学部)

### §1 概要

エウクレイデス「原論」の第7～9巻は、「数とは単位（1に相当）を合わせた多である」の定義のもとに、約数や倍数、偶数や奇数、素数や合成数、互いに素、最大公約数や最小公倍数、完全数などを扱っており、歴史的にはいわゆる初等整数論の原点と見なされる事が多い。そしてブルバキ「数学史」やヒース「ギリシア数学史」では、素因数分解（一意的）そのものは「原論」では証明されていないが、暗黙裡に素因数分解は知られていた？という印象を与える記述になっている。

例えばブルバキ「数学史」では、「ただし、素因数分解の存在と一意性だけは、一般的な仕方では証明されていない」（和訳、東京図書、p103~104）と述べられ、ヒース「ギリシア数学史」では、「(第9巻の) 命題14は、<一つの数は一つのやり方でしか素因数に分解することはできない>という重要な定理に等しい命題である」（和訳・復刻版、共立出版、p195）と述べられている。概して言えばこれらの見方は、代数的整数論を創始したガウス以降の近代の初等整数論の思想を、エウクレイデス「原論」の中に見ようとするものである、と言えるかもしれない。

しかしながらエウクレイデス「原論」と近代の初等整数論を比べると、そこには大きな違いがある事が、近年のエウクレイデス全集（東大出版会）の翻訳・解説を担当した斎藤憲（前日本科学史学会会長、前大阪府立大学教授）によって指摘されている。例えば近代の整数論は整数の加減乗除を基礎としているが、斎藤はエウクレイデス「原論」の整数論（第7巻～第9巻）について、「最も基本的な操作は、加法でも減法でもなく“測る”ことである」と指摘し、「測る」ことが「定義が不要であるほど（あるいは定義ができないほど）基本的な術語であることは、「原論」の整数論が、我々の初等整数論とまったく異なった基礎から出発するものであることを示唆している」と論述している。注1） また素因数分解について、「原論」では「そもそも数を素因数の積として表すというアプローチが稀にしか見られず、素因数分解という観念自体が実質的に存在しないということである」と断っている。（以上、エウクレイデス全集・第2巻・「原論」Ⅷ～Ⅹ、第2章・数論諸巻解説より）

注1）「原論」で使われている“測る”の古代ギリシア語はメトレイであり、それはゲオメトリア（平面幾何学）の原義である「ゲオ（土地）+メトリア（測ること）」のメトリア（名詞形）と同根である。

本講演では上記の2つの解釈の違いについて、斎藤が翻訳した「原論」を通じて比較検討する。さらに、そこから提起される数学史の本質的問題についても考察する。

§2では、「原論」の数と斎藤の指摘する「測る」の概念を説明し、

§3では、「原論」の「測る」と四則演算（加減乗除）の関係を分析し、

§4では、「原論」の素因数分解の解釈について、第8巻や第9巻の命題を分析し、

§5では、「原論」の数論の解釈を通じて、数学史における「解釈」の問題を考察する。

### §2 「原論」の数と「測る」とは？

#### <数の概念>

エウクレイデス「原論」の数論の特徴は、他のどの古代文化圏の数学とも異なり「数体系に基づく計算術という側面をもたない」という事である。シュメール・バビロニアの数学は60進法の数字システムに基づく計算術であり、古代エジプトも10進法の数字による計算術であり、古代中国の「九章算術」も、一、二、三、・・・十の数字に基づく計算術（つまり算術）であった。これらバビロニア、古代エジプト、古代中国の数学は、灌漑農業を土台とする官僚制度の役人たちによって、収穫量や農地の大きさやパンの分け前や度量衡などの計算の必要性から生まれていった。（その延長線上に、バビロニアの高度な計算数学や観測天文学がある）

しかし古代ギリシアは、その様な灌漑農業を土台とする中央集権的な官僚制度をもたなかった。元々ギリシアの地は灌漑農業に不向きであり、雨が少なくても育つオリーブやブドウの栽培が主であって、灌漑農業を支える「暦」の必要性が少なかった。この事はポリス時代初期のギリシア天文学が、宇宙の幾何学的構造の探求を問題にしており、暦作成の為の観測天文学ではなかった事に対応している。(ヘレニズム時代以降にギリシア天文学は、ヒッパルコスなどによってバビロニアの観測天文学を取り込んでいった) ポリス時代(BC 8世紀~BC 3世紀頃)のポリスは貴族・市民の防衛共同体であり、王・神官・書記らによる中央政府をもたず、主に手工業などによるエーゲ海・地中海の交易によって繁栄していった。その過程でオリエント世界と交流を深め、バビロニアの天文学やエジプトの縄張り師(土地の測量を行う役人)の知識などが、ギリシア人に知られる様になり、そこからギリシア特有の学問としてのゲオメトリア(平面幾何学)、ステレオメトリア(立体幾何学)、アリスメティケー(数論)、ハルモニア論(音階論)などのマテーマタ(数学的諸学、ギリシア的数理科学)が生まれていった。

それらはプラトンが「国家」で指摘している様に、いわゆるフィロソフィアの発展と密接に係る側面をもつ様になった。例えば、点そのもの(大きさをもたない)のイデア性(理性のみで認識する)が述べられ、単位の分割不可能性が論証され(ゼノンの逆理の否定)、線分の比喻では**連続的な比例**「 $a:b=b:c=c:d$ 」が非常に本質的なものとして強調され、マテーマタの諸学問がポリスを指導する哲人王たちに必修な学問として導入された。その背景には、プラトンが創設した学園アカデメイアにおける、エウドクソスやテアイテトスらによる高度なマテーマタの研究(無理量や正多面体など)や教育があった。アリストテレスもその様なマテーマタの教育を受け、後にマテーマタを必然的な真理を探求する理論学の中に位置づけた。

つまりヘレニズム時代前半に編集された「原論」は、それまでのマテーマタ研究の一つの集大成として、「**数体系に基づく計算術という側面をもたない**」ものとして計画されているのであり、その事は有名な数の定義「**数は単位を合わせた多である**」に現れている、と言えよう。例えば、3は単位を\*として\*\*\*である様に、数とは単位\*の集まりであり、原理的には数字を必要としているわけではなく、従って数字による計算を前提にしていない、という事である。この事は「原論」の数論において、数がすべて「**線分**」で表されている事からも理解される。数を線分で表せば数字での表記は不要になるのであり、その場合、数は単位となる線分の和(結合)としての線分で表せるが、逆に数としての線分を単位(線分)で「**測る**」ことによって、線分の表す数が認識されるのである。(定義「**単位とは、それによって「一」と呼ばれるものである**」)

#### <測る>

なぜ「原論」では、数が線分で表されるのか? まず「原論」全体の構成を見てみると、第1~4巻は比例論(相似)を使わない平面幾何学、第5巻は量(メゲトス、線分や図形の大きさ)の比例論、第6巻は比例論(相似)の応用としての平面幾何学、第7~9巻が数論、第10巻が無理量論、第12~13巻が立体幾何学、となっている。最初に比例論が現れるのが第5巻であり、ここでも量は次元(1次元は線分、2次元は平面図形の大きさ、3次元は立体図形の大きさ)に関係なく、線分で表されている。そして最初の2つの定義で「測る」事が導入される。(エウクレイデス全集の斎藤の翻訳による、以下同様)

(定義V1) 量が量の、小さい方が大きい方の部分であるのは、(小さい方が)大きい方を測り切るときである。

(定義V2) また大きい方が小さい方の多倍であるのは、(大きい方が)小さい方によって測り切られるときである。

注2) 「原論」の原本では、定義、要請、命題、等に番号は振られていない。この事が後世の追加・修正を容易にしたのかもしれない。斎藤らは後世の追加の是非を、ギリシア語の使い方などで判断している。

ここでの「測り切る」とは、線分で考えた場合、第7~9巻の数論とまったく同じ操作になっている。(下の定義を参照) つまり「測る」ことは数と量の両方に適用可能な概念であって、「測る」ことにより、量の比例論は数の比例論を部分的に含むという解釈も成立する。(この点について章末の「追記」で補足した) 上の2つの定義に対応する第7巻の定義は以下の通りである。

(定義VII3) 数が数の、小さな数が大きい数の単部分であるとは、(小さな数が)大きな数を測り切るときである。

(定義VII5) また大きな数が小さい数の多倍であるのは、小さな数によって測り切られるときである。

注3) 単部分とはある数の約数の事であるが、ある数より小さいので、ある数自身は約数とみなされていない。  
またある数の多倍された数は倍数であるが、単部分と同様にある数自身は倍数とみなされない。

上の2つの定義の対応から、「測る」ことが「原論」の量と数の比例論における最も基本的な操作である事がわかる。逆に言えば、「原論」は最初から数の加減乗除を土台としない数学として、構想されたものと思われる。つまり数の計算による代数学が最初から除外されていると言えるが、元々ポリス時代の数の表現には独立した数字が使われず、1, 2, 3, …の代わりに、文字  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  が使われており、合理的な計算を表記する体系がなかった事を考えると、テオリア（観る事）を重視したギリシア人は数の計算よりも、幾何学的な発想での理論構築（数や量を線分で表す）を選んだ、あるいは愛好したと言えるかもしれない。

第5巻と第7～9巻、第10巻の違いは、第5巻は2～4つの量の比や比例を扱うがまだ単位は導入されておらず、第7巻で単位が導入されて数の約数・倍数の比例関係が扱われ、第10巻では共測な尺度が量の比例論に導入され、共測な尺度をもたない非共測量（無理量）が探求される。歴史的に考えると、偶数・奇数・三角数などの小石の数論やピュタゴラス音階などの数の比例論の方が先にあって、非共測量の発見によって共測な数を含む量の比例論（第5巻や第10巻）が探求されていった、と考えられる。（この辺はサボーの本や斎藤の解説・研究がくわしい）  
**<エウクレイデスの相互差引法>**

「原論」第7巻の命題1～2は、エウクレイデスの相互差引法によって、2つの数の最大共通尺度（最大公約数）が求められている。現在では、この方法はユークリッドの互除法と呼ばれているが、斎藤はユークリッドの互除法は数の四則演算を前提とする割り算に基づいているので、エウクレイデスの相互差引法とは根本的に異なる、と主張している。この2つの方法を比べてみよう。

#### (ユークリッドの互除法)

「2つの自然数  $a, b$  のペアを  $a > b$  のときに  $(a, b)$  と表す。

$a$  を  $b$  で割って商が  $A$  で余りが  $c$  とする。  $a = Ab + c$  ( $0 \leq c < b$ ) と書ける。

余り  $c = 0$  のとき、 $b$  は  $a$  の約数（最大公約数）であり、

余り  $c \neq 0$  ならば  $(b, c)$  にまた割り算を行う、

商が  $B$  で余りが  $d$  とすると、 $b = Bc + d$  ( $0 \leq d < c$ ) と書ける。

余り  $d = 0$  のとき、 $b = Bc$   $a = (AB+1)c$  となり、

$c$  が最大公約数となる。

余り  $d \neq 0$  ならば  $(c, d)$  にまた割り算を行う。

余りが0でないならば、この操作をペア  $(a, b)$   $(b, c)$   $(c, d) \dots$  と続けてゆく、

(ただし各ペアの小さい方の数は1より大きいとする)

$a > b > c > d > \dots \geq 1$  であるので、この操作は有限回で終了する。

この操作を続けていき、割り算を行って余りが0となるペア  $(x, y)$  があれば、

$y$  が最大公約数となる。

この操作を続けても余りが0となるペアが現れないならば、

各ペアで割り算を行った余りは、 $c > d > e > \dots \geq 1$  となるので、

最後のペア  $(x, y)$  に割り算を行った余りは1となり、 $a$  と  $b$  は互いに素となる。」

#### (エウクレイデスの相互差引法)

エウクレイデスの相互差引法は数を線分で表しており、「原論」第7巻の命題の証明でも、線分の図が描かれている。命題1で、その様子を見てみよう。

##### (命題1)

「2つの数  $AB, GD$  の小さい方の数が大きい方の数からつねに相互に取り去られるとき、残された数が決して直前の数を測り切ることがなく、単位が残されるとしよう。私は言う、数  $AB$  と  $GD$  は互いに素である、すなわち  $AB, GD$  を単位のみが測る」

(この言明は、上のユークリッドの互除法で、 $(a, b)$   $(b, c) \dots$  のペアで割り算を行っても余りが0となる事がない場合である)

まず注意すべきは、数を線分の様に  $AB, GD$  と表す事によって、任意の数  $(a, b)$  と同等な役割を果たしている、という事である。

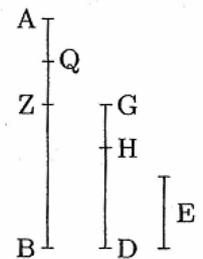
しかし上のユークリッドの互除法の説明では、 $(a, b)$  が任意の自然数なので、 $(a, b)$   $(b, c)$   $\dots$   $(x, y)$  のペアの個数は具体的に確定する事はできなかった。この状況に対応して、「原論」では斎藤が「**準一般的証明**」と呼ぶ方式が使われている。(第5, 第7~9巻など)

(命題1) の場合、 $AB > GD$  として上のユークリッドの互除法のペアと同様に考えて、「 $(AB, GD)$   $(GD, AZ)$   $(AZ, HG)$   $(AB > GD > AZ > HG)$  が登場し、最後のペア  $(AZ, HG)$  で  $AZ$  を  $HG$  で測ったときの残り(余り)  $QA$  が単位となる」と書かれている。(下の図版を参照) つまり上のユークリッドの互除法の一般性とは異なり、登場するペアは具体的に3つなのである。これが「**準一般的証明**」であるとは、上のペアの個数が4, 5, 6,  $\dots$  と増えていっても、同様に証明できる(だろう)という事である。

注4) 安易に数学的帰納法のように解釈できない事を、斎藤が指摘している。有名な完全数についての第9巻・命題36も、2のべき(指数)となる素数  $p$  が5の場合のみが証明されている。つまり  $p$  が他の素数でも同様にできる、という事である。

(命題1の証明の上の部分の原文)

というのは、もし  $AB, GD$  が互いに素でないならば、何らかの数がそれらを測ることになる。測るとし、[その数を]  $E$  としよう。そしてまず  $GD$  が  $BZ$  を測って、それ自身より小さい  $ZA$  を残すとし、また  $AZ$  が  $DH$  を測って、それ自身より小さい  $HG$  を残すとし、また  $HG$  が  $ZQ$  を測って、単位  $QA$  を残すとしよう。



(底本の図版)

(命題1) の証明の方針は、 $AB$  と  $GD$  が互いに素でないとして矛盾を導く背理法である。そこで上の原文の様に、公約数として単位でない  $E$  を仮定するのである。

さてユークリッドの互除法では、 $(a, b)$  について割り算を行って、 $a = Ab + c$  と表記した。これに相当するのが、上の原文で「 $(AB$  より小さい)  $GD$  が  $BZ$  を測って、それ自身より小さい  $ZA$  を残す」である。ここで「 $GD$  が  $BZ$  を測る」とは、現代の記号では  $BZ = mGD$  となる自然数  $m$  がある事であるが、上の図版では  $m = 1$ ,  $BZ = GD$  の場合が描かれている。(これも準一般的表記と言えるかもしれない) 現代の記号で表せば、 $AB = BZ + AZ = mGD + AZ$  ( $AZ < GD$ ) と書ける。この様に「測る」事において、割り算の等式の様に具体的な商(上では  $m$ ) が数として明記される事がないのである。また上の線分としての数の+は、数字的な計算ではなくて、視覚的に線分で表される数の(集合としての)和を意味する、と解釈した方が自然であろう。

(古代ギリシアでは、位取りを前提とする独立した数の表記がなかった事に留意したい)

### <相互差引法と音階論>

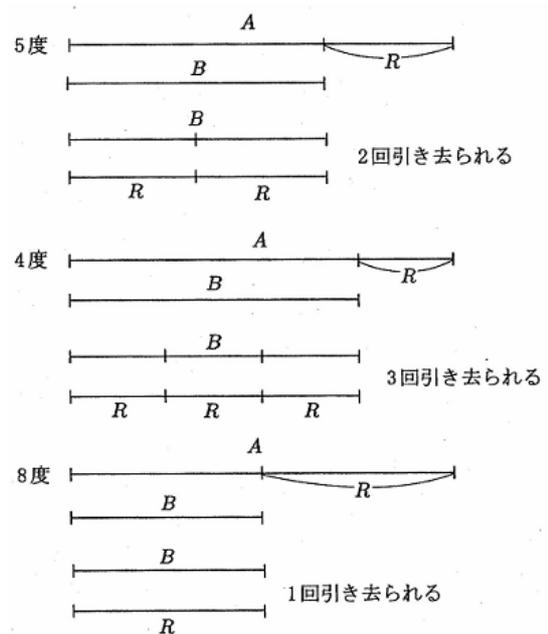
なぜ数が線分で表されるのか? この問題を歴史的にたどると、エウクレイデスの交互差引法とピュタゴラス派の音階論の密接な関係が見えてくる。

ピュタゴラス派の象徴でもあったピュタゴラス音階とは、具体的にはモノコルド(弦が一本の楽器)の弦の長さ(線分)の比が、 $1:2, 2:3, 3:4$  となる音階の事であるが、それは右の様に線分(弦)の相互差引によって実現される。

右の図では上から順に、 $A:B = 3:2 = \text{ド}: \text{ソ}$  (5度)、 $A:B = 4:3 = \text{ド}: \text{ファ}$  (4度)、 $A:B = 2:1$  はオクターブ(8度)となる。

音階論が線分(弦)の長さの比(音程)として、探求されたたすると、数が線分で表されるのは自然な発想ではないだろうか。そしてこの線分の交互差引が有限回の操作で終わらないとき、そこに無理数が現れてくる。

(参) 右の図は「ギリシア数学の探訪」上垣渉、日本評論社、2007、を引用した。



右の図はピュタゴラス派のシンボルと言われる、テトラテュクス  
 (四元三角形) であり、上から順に  $1:2, 2:3, 3:4$  のピュタゴラス  
 音階の比を表現している。しかし右の図そのものが示しているのは  
 数字としての  $1:2, 2:3, 3:4$  ではなくて、「原論」の数の意味での、  
 $*:**, **:***, ***:****$  という事であろう。  
 まさしく「数は単位 (今の場合は\*) を合わせた多である」をよく示している。



斎藤も解説で、エウクレイデスの数論と音階論の関係に言及しているが、実はエウクレイデスも「カノーンの分割」や「ハルモニア論入門」という音階論を書いているのであり、当時のマテマタ (数学的諸学、ギリシア的数理科学) は、数や量の比例論 (広い意味の幾何学) という共通言語を通じて、アルキユタスが「兄弟的な学問」と称した、幾何学、数論、音階論、数理天文学、などを含んでいるのである。ここでカノーンの原義はモノコルドの一本弦 (線分) であり、カノーンの分割とはピュタゴラス音階の様に、弦の分割つまり音程の探求である。

エウクレイデス「カノーンの分割」の実質的内容は数の比例論であり、斎藤は「カノーンの分割」命題3と「原論」第8巻・命題8の関係を指摘している。注5)

注5)「カノーンの分割」と「ハルモニア論入門」はエウクレイデス全集・第5巻 (東大出版) に掲載予定である。

またこの巻には、エウクレイデスの天球・球面幾何学である「ファイノメナ」も掲載される。

「カノーンの分割」の訳文は、下の参考文献にも載っている。この論文では「カノーンの分割」の主題が、「部分超過比に比例中項を挿入する事の不可能性の証明」である、と説明されている。比例中項の問題は、「原論」第8巻で議論されているので、その関係性を斎藤が指摘しているのである。

(参)「カノーンの分割」 解題・訳・注釈 片山千佳子、東京芸術大学音楽学部年誌11, 1986

(上記のエウクレイデス全集・第5巻でも、片山千佳子が翻訳・解説を担当している)

### <追記；数は量なのか？>

講演当日の質疑応答で足立恒雄 (早大名誉教授) 氏から、「数は量なのか？」という質問があった。数と量が異なる概念である事は、エウクレイデスの「原論」では基本的な事柄であるが、講演者の記述の仕方によって「数と量が混同される」事を危惧しての指摘であったように思う。原稿を読み直すと「つまり「測る」ことは数と量の両方に適用可能な概念であって、「測る」ことにより、量の比例論は数の比例論を部分的に含むという解釈も成立する。」という表現があり、確かに「数は量である」とは言っていないが、「量の比例論が数の比例論を含む」という表現はやや説明不足で誤解を生む可能性もあるので、ここで追記としてもう少し講演者の意図を説明したいと思う。

まず量 (メゲトス) とは線分や図形の「大きさ」の事であるが、斎藤憲の説明によれば、第一に視覚で理解できる「大きさ」であって、現代の様に実数値で計算できる長さや面積を前提としているわけではない。斎藤憲は「原論」には、実数値に対応した面積や体積の公式は書かれていない、と述べている。その代わりに2つの大きさの比較 (比) を通じて「大きさ」が認識されている。例えば三角形の大きさは、底辺を共有する長方形の大きさの半分として把握される (つまり三角形と長方形の大きさの比が  $1:2$  となる) この思想は「原論」第1巻から貫かれており、まだ比という言葉は使われていないが、「原論」第1巻は任意の凸多角形を容易に (眼で見て) 比較しやすい一辺と一つの内角が定められた平行四辺形 (長方形含む) に等積変形する事を目的としている。(「原論」第1巻、命題45) つまり非常に複雑な多角形もすべて長方形に等積変形すれば、その大きさも明確に比較可能になるという事である。(ここには実数によって図形の面積を計算しようとする発想はない)

次に量と数の関係であるが、それは端的に上記のピュタゴラス音階に現れている。そこでは、弦A、Bは線分として量であり、 $A:B=3:2$  の時、 $3:2$  は比 (ロゴス) であり、 $3, 2$  は数である。数 $3, 2$  は実際にはテトラテュクスの様に、\*を単位として\*\*\*、\*\*、と認識されているのであって、それは\*に対応する (単位) 線分eがあり、 $A=3e, B=2e$  と表される、つまりA、Bが $A=e+e+e, B=e+e$ 、としてeによって「測られる」ことに対応している。上ではA、Bはeによって「測り切られる」が、一般に量がより小さな量によって「測り切られる」とは限らない。数の場合は必ず  $m:n$  のように自然数の比で表されるが、量の場合はそのように表されない無理量が登場する (例えば正方形の一辺と対角線の比)。この様な相違に対応して「原論」第10巻では、有理量と無理量 (斎藤の翻訳では共測量と非共測量) が区別されて無理量の理論が探求されている。

そして

(a)「測る」ことは数と量の両方に適用可能な概念である。

(b)「測る」ことにより、量の比例論は数の比例論を部分的に含むという解釈も成立する。

については、上で説明した数と量の関係を踏まえて「原論」の構成や命題相互の関係から推測される。まず (a) については、斎藤が「測る」ことは「原論」で定義されていない（無定義）ほど基本的な操作であると指摘しているが、この「測る」事を土台としているのが、「原論」第5巻から第10巻までの内容なのであり、第5巻の量の比例論と第7巻の数の比例論の類似性がその定義に現れている。その事を指摘するするために、§2の前半でそれらの定義を引用したのである。もう一度述べよう。

(定義V1) 量が量の、小さい方が大きい方の部分であるのは、(小さい方が) 大きい方を測り切るときである。

(定義V2) また大きい方が小さい方の多倍であるのは、(大きい方が) 小さい方によって測り切られるときである。

(定義VII3) 数が数の、小さな数が大きい数の単部分であるとは、(小さな数が) 大きな数を測り切るときである。

(定義VII5) また大きな数が小さい数の多倍であるのは、小さな数によって測り切られるときである。

(注) この量と数の比例論の類似性については、線分(弦)と数(音程)が密接に関係しているハルモニア論を歴史的な起源としていると指摘するサボアの有名な研究がある(サボア「ギリシア数学の始原」邦訳、1978)が、エウクレイデスにおいても「原論」の数論と「カノンの分割」(音程論)の命題の類似性などは数論とハルモニア論の密接な関係を示すものであろう。

さらに「原論」第10巻も、「測る」ことによる定義から始まっている。

(定義X1) 共測な量と言われるのは同一の尺度で測られるものであり、また非共測な量と言われるのはいかなる量もそれらの共通の尺度になり得ないものである。

次に (b) を説明するために、「原論」の第5巻から第10巻までの内容をもう一度振り返って見よう。

(第5巻)「測る」ことを土台とする量の一般論(共測と非共測の区別はまだ導入されていない)

(第6巻)「測る」ことを土台とする量の比例論の図形への応用(相似を用いた証明)

(第7～9巻)「測る」ことを土台とする数論(数は単位からなる多であり、量ではない)

(第10巻)「測る」ことを土台とする無理量の探究(有理・無理量の区別の導入)

上記の構成から言える事は、第7巻～第9巻の「数論」が量の比例論である第5巻と第10巻の中間にあつて、「測る」ことを土台とする“比例論”の中に位置づけられている、という事である。(⇒(a)の説明としての上の定義の対応関係を見よ)

量の比例論の構成としては、無理量の発見史をふまえると一般論、有理量、無理量、と進むのが理論構成上の自然な流れであり、比例論の最後として第10巻の無理量論がくるのは当然の事と思うが、なぜ「数論」が第5巻と第10巻の中間にあるのであろうか? その理由としては、有理量の比例論が数の比例論と類似的な関係にある事が考えられる。数は「単位から成る多である」から、単位を共通の尺度と考えれば有理量との関係(共測的)と類似な関係になるからである。その事を示す、第7巻と第10巻の類似的な命題を述べよう。

(命題VII2) 互いに素でない2数が与えられたとき、それらの最大共通尺度(最大公約数)を見出すこと。

(命題X3) 2つの共測な量が与えられたとき、それらの最大共通尺度を見出すこと。

この2つに命題の証明法について、斎藤は「(エウクレイデスの)相互差引法を用いて、本質的に同じ議論を展開している」と述べている。(エウクレイデス全集の解説) さらに第10巻では以下の命題で、数と有理量の類似性が述べられている。

(命題X5) 互いに共測な2量をもつ比は、数が数に対する比である。

(命題X6) もし2量をもつ比が数が数に対する比であるならば、それらの量は共測になる。

まさに上の命題は、有理量と数の“比”としての同値性を示している。つまり量と数は数学的対象(存在)としては異なるものの、有理量と数は“比”という比例論の中心的概念で同じ役割を果たす事が認められているのである。この事はまさしく比例論においては、(b)の解釈が妥当である一つの根拠を示している様に思われる。ただしこの事はもちろん「数論」の独自性を

否定するものではない。「原論」では概念や証明の構成上の必要性から、数論（第7~9巻）が無理量論（第10巻）の前に置かれているが、それは数論が無理量論の準備的役割を果たすという意味ではない。「数論」では完全数の理論など後世に影響を与えた独自の研究成果や連続比例、平方数や立方数などの独自のテーマが探究されており、数論が3つの巻に分かれている事自体が「原論」における数論の研究成果の豊穡さが示していると言えよう。（プラトンの「国家（ポリテイア）」などでも、単位の不可分性が非常に本質的な事として語られている）

また第10巻の無理量の研究と言っても、無理量（線分）を一辺とする正方形が有理量になる（平方において共測）場合の様に、本質的に有理量との関係において無理量が探究されているのであって、斎藤はエウクレイデス全集の解説で、第10巻の主要テーマは現代の表記で「 $(\sqrt{m} \pm \sqrt{n})^2 = \sqrt{M} \pm \sqrt{N}$ 」と書かれる問題であると説明している。

つまり比例論においては、あくまで数の比例論（共測量の比例論）が理想的なモデルであって、無理量の比例論はどれだけ共測量の理論が非教則量の理論に拡張できるか？あるいは拡張できないか？が具体的に調べられているとも言えよう。そして共測性と非共測性の土台が「測る」ことであり、第7巻が「測る」ことの有限性から始まり、第10巻が「測る」ことの無限性から始まっているのは、まさに「測る」ことが比例論の共通の土台である事を示している。（それが**(b)**の言明の意図であった）

### §3 「測る」と四則演算

§2の内容を踏まえて、「測る」と自然数の四則演算を比べてみよう。上の説明の様に、エウクレイデスの相互差引法は「測る」ことを前提としており、ユークリッドの互除法は割り算を前提としていて、根本的に異なるであることは明らかになった。では「測る」ことは、現代の数学では、どのように解釈すればよいのであろうか？ 加法・減法と乗法・除法に分けて考察してみよう。

#### <加法・減法>

まず（定義VII 2）「数とは単位を合わせた多である」について、上でも説明したように自然数のnに対応するのは、単位を\*として「\*\*・・・\*」（\*がn個、一般に $2 \geq n$ ）である。よって「単位を合わせる」とは、単位\*のn個の和をとると言うことになるが、この論考では加法的な和を考えると、「\*+\*+・・・+\*」という記号で表す事にする。これが「原論」での素朴な（無定義の）意味での加法という事になる。この意味の「合わせる」は「原論」の量や数の理論で、同じ意味で使われている。このとき「原論」では、数は常に「\*\*・・・\*」という存在として認識されているのであって、それを一つの数字（記号）で表して、計算に持ち込むことができない。その事を裏付けるのが数の線分による表記であり、線分は数値化して計算することができず、線分を数として「合わせる」とは、線分を結合して和をとることに他ならない。

#### （観察1）「合わせる」＝「和をとる」＝「原論」の加法

ただし「原論」では、数論の命題は主として「測る」と「多倍する」によって証明が進められており、上の意味で「合わせる」や「和をとる」ことは、たまに補助的に用いられるだけである。

次に減法であるが、エウクレイデスの相互差引法のように、 $a > b$ のときaをbで測って、測り切らない場合は残り（余り）の数cがある。つまりaからbを多倍した数を引いた残りがcという事であり、上の第7巻命題1では「(ABより小さい)GDがBZを測って、それ自身より小さいZAを残す」と表現される部分である。これは数aを{\*がa個}として、そこからbの多倍となる{\*がbの多倍}を引いた数(集合)がcという事であり、cは数を単位\*の和集合とみたときの差集合である。この様に、数から数を取り去って数が残ることが、「言論」での素朴な（無定義の）意味での減法という事になる。

#### （観察2）「数を取り去って数が残る」＝「差をとる」＝「原論」の減法

次に「測る」と「多倍する」について見てみよう。まず定義を再確認する。

（定義VII 3）数が数の、小さな数が大きい数の単部分であるとは、(小さな数が)大きな数を測り切るときである。

（定義VII 5）また大きな数が小さい数の多倍であるのは、小さな数によって測り切られるときである。

ここで齋藤の言う様に、「測る」ことは無定義で導入されており、「数  $a$  が数  $b$  の多倍である」ことも「数  $b$  が数  $a$  を測り切る」ことと同値な事として、「測る」ことがより基本的な演算と見なされている。ではまず「測る」ことと、加法・減法の間係をを考えてみよう。

$a > b$  のとき、数  $a$  を数  $b$  で測る場合、(1) 測り切る、(2) 測って残り (余り) がでる、のいずれかである。「原論」の数の認識では、(1) は  $a = b + b + \dots + b$ 、として数  $a$  は数  $b$  の和になる、言い換えれば単位の定義と同様に「数  $a$  は数  $b$  を合わせた多である」とも言えよう。(2) も  $a$  を  $b$  で測って  $c$  を残すとき  $a = b + b + \dots + b + c$ 、として数  $a$  は数  $b$  の和と数  $c$  の和となる。以上から

**(観察 3) 「数  $a$  を数  $b$  で測る」 =  $a$  を数  $b$  の和で表す (測り切る)、または  
= 数  $a$  を数  $b$  の和と残りの数  $c$  ( $c < b$ ) の和で表す。**

この様に解釈すれば、「測る」ことは加法的な分解であって、ユークリッドの互除法の様な割り算を用いていない事に注意しよう。数を線分で表せば、「測る」とは「等分割」してゆく事であり、コンパスによって「等分割」する操作が可能である様に (数  $b$  を表す線分  $B$  を何回も延長してゆく)、それは数字による割り算ではなく、幾何学的な性質として認識されているのである。(右図)



数  $B$  が数  $A$  を測る

しかしユークリッドの互除法では、(1) は  $a = mb$ 、

であり  $a$  を  $b$  で割算したときの商  $m$  は明確に表されている。

この  $m$  は「原論」では、どのように考えられているのであろうか?

この  $m$  が「原論」の証明で必要なときは、「数  $a$  を数  $b$  で測る回数」

という言い方で登場する。後で述べるが、「原論」第 7 巻にも、数と数の積は定義されているので、「数  $a$  を数  $b$  で測った回数」も数であり、それを  $m$  とすれば「原論」でも  $a = Mb$  に相当する概念は成立する。(この数と数と積も、「測る」ことによって定義される) しかし、それも数  $a$  が数  $b$  で何等分されるかという事であって、数字の割算としてのアルゴリズムというより、幾何学的な「等分割」に基づく、「測る」ことの加法性がより根本にあると言えよう。

また「原論」で上の  $m$  が具体的な数として表記される事がほとんどないのは、「原論」全体が定性的な真理の記述という性格をもっているからと考えられる。上の「数  $a$  を数  $b$  で測る回数」という言い方がある様に、 $a = mb$  となる数  $m$  の存在そのものが認識されていないわけではない。例えば、「数 6 を数 2 で測る」とき、 $6 = 3 \times 2$  となる 3 は上の図の様に、眼前に現れているのであって、数字を用いなくても (幾何学的に) 認識されているのである。

### <乗法・除法>

次に、上の「測る」ことに関連して、「原論」での数の積について考察しよう。

**(定義 VII 16) 数が数を多倍すると言われるのは、その (多倍する) 数の中に単位があるのと同じ回数だけ、多倍される数が加えられて何らかの数が作られるときである。**

(わかりやすく言うと、数  $b$  が数  $a$  を多倍した数は、数  $a$  を  $b$  個合わせた数である。)

また (定義 VII 5) より、数  $b$  が数  $a$  を多倍した数は、数  $a$  で ( $b$  回) 測り切られる。

具体例として、3 が 2 を多倍する数 ( $3 \times 2$  に相当) を考えてみよう。「原論」の数の定義に従って、2 を  $**$ 、3 を  $***$  で表す。多倍される数が  $**$  で、多倍する数が  $***$  である。多倍する数  $***$  は単位  $*$  が 3 回現れる。よって  $**$  を 3 回加えて (和をとって)  $** + ** + ** = ****$  となる。これが上の定義の意味する所である。今この「原論」の意味で、上式の左辺を「 $3 \times 2$ 」、右辺を「6」と表記しよう。そうすると、「 $b \times a$ 」は、「 $*$  が  $a$  個」の  $b$  個の和として「 $*$  が  $ba$  個」となり、「 $b \times a$ 」 = 「 $ba$ 」となる。ここで、数  $b$  が数  $a$  を多倍した数「 $b \times a$ 」と、数  $a$  が数  $b$  を多倍した数「 $a \times b$ 」が同じであること、つまり積の可換性「 $b \times a$ 」 = 「 $a \times b$ 」は、定義から自明ではないので第 7 巻・命題 16 で証明されている。

では、この数の乗法と「測る」ことの関係は? 数  $b$  が数  $a$  を「測り切る」とき、数  $b$  が数  $a$  を測る回数を  $m$  とすると、「 $b$ 」 = 「 $m \times a$ 」と書ける。従って数の積「 $m \times a$ 」は、数「 $ma$ 」が数  $a$  で「測り切られる」ときの状況を、数  $m$  を用いて表現している事になる。つまり数の積は、「測る」という基本演算の中にすでに ( $m$  を表記しない形で) 含まれている、と考えられる。

**(観察 4) 数の積の概念は、「測る」という基本演算の中に含まれている。**

「 $a \times b$ 」 = 「 $ab$ 」  $\Leftrightarrow$  数「 $ab$ 」が数  $b$  で測り切れ、数  $b$  で測る回数が  $a$  である。

この数の積を用いると、(観察 3) の「測る」ことは、次の様に書ける。

(観察3') 「数 a を数 b で測る」 $\Leftrightarrow$  「 $a = m \times b$  (測り切る)」または、  
 $\Leftrightarrow$  「 $a = m \times b + c$ 、ただし  $c < b$ 」

上の等式は、現代の乗法を基礎とする割り算の等式と同じ形をしている事に注意したい。そうすると次の様な問題が生じる。

#### (問題 1)

(1) 「測る」ことは、(観察3')により“割り算”なのか？

(2) エウクレイデスの相互差引法と、ユークリッドの互除法の本質的違いは？

確かに現代の初等数学では、「割り算の実行」 $\Leftrightarrow$ 「割り算の等式」と解釈されているが、「原論」の数論では「割り算」そのものは定義されていない。確かに「数 b を数 a で測る」ことによって、「 $b = m \times a$ 」または、「 $b = m \times a + c$ 」となる  $m$  が認識されるが、「測る」ことは決して  $m$  を求める数字の計算としては理解されていないと思われる。その理由は(観察3)で説明したように、「原論」において「測る」とは、数としての線分を「等分割」してゆく事であり、コンパスによって「等分割」する操作が可能である様に(数 b を表す線分 B を何回も延長してゆく)、それは数字による割り算ではなく、あくまで幾何学的な性質として認識されているからである。(「原論」がその様に構成されている、という事であってギリシア人が割り算を知らなかったという意味ではない) エウクレイデスの相互差引法においても、 $a > b$  となるペア  $(a, b)$  から交互に差し引いた残り(余り)の数によって、最大公約数や互いに素がわかるのであって、 $m$  そのものの値は証明には使われていない。その事はユークリッドの互除法でも同様であるが、現代の初等数学では(幾何学的に)「測る」ことではなく、数(数字)の割り算によって余りが求められるので、数の加減乗除が前提とならざるを得ない、という事である。つまり結果として「測る」ことは、数の割り算を前提とせずに割り算の等式(と同等な役割)へ至る方法である、とも言える。より具体的な例で説明すれば、「測る」ことは  $6 = 3 \times 2$  という分解ではあるが、 $6 \div 2 = 3$  という割り算ではない、という事である。

(結論 1) 「原論」における「測る」ことは、割り算の等式と同じ役割を果たすと解釈できるが、それは数の加減乗除を前提とする「除法(割算)」に基づいていない。  
「測る」ことは、幾何学的な加法的分割に基づいている。

この辺の事情は、古代エジプトやバビロニアの計算術における「割り算」と比較するとわかりやすい。古代数学における割り算は、「分数(逆数)」の概念をともなっている。古代エジプトでは、「割り算」は「分数」の計算術と関連している。それはパンの配分の問題などに見られる。例えば「アーメス・パピルス」第6問では、「9個のパンを10人に分ける」方法として、分数の  $9/10 = 2/3 + 1/5 + 1/30$  という分解が用いられている。(古代エジプトでは  $2/3$  以外は、分母が1の単位分数のみが使われていた) またバビロニアでは、分数概念とともに60進法の合理的な数字表記(少数を含む)の計算数学が用いられていた。例えば「1029を64で割る」場合、1029をまず60進法で(17, 9)と表し、64の逆数  $1/64$  をやはり60進法で(0.0, 56, 15)と少数で表し、それを掛ける事によって計算している。その為に、最初からくわしい逆数の表が作られていた。この様な割り算をともなう計算は、古代エジプトやバビロニアの書記たちによって、パンの配分、土地の広さ、などの様々な問題を、未知数を求める方程式(1次、2次、連立など)を利用して解く過程で、必要不可欠なものとして発展していった、と思われる。注6)

注6) 「非ヨーロッパ起源の数学」ジョージ・G・ジョーゼフ、講談社ブルーバックス、1996から引用

つまり「割り算」は、数字による代数学の計算と不可分に結びついているが、「原論」の構成は平面幾何学に始まり立体幾何学で終わり、幾何学的対象であるの量の比例論で初めて「測る」ことが導入され、数論も数が線分で表されて「測る」ことが適用されている事から、「原論」の数論は数の加減乗除に基づく代数学ではなく、「観ること(テオリア)」に基づく、“幾何学”の精神で構想・編集されている、と考えられる。この事が、まさしく斎藤憲が指摘している事であった。

#### (結論 2) <斎藤憲のテーゼ A>

「原論」の数論は、数の四則演算ではなく「測る」ことによって構成されている。

## §4 「原論」と素因数分解

斎藤テーゼにもかかわらず、なぜ§1で紹介したブルバキやヒースなどの「原論」の中に素因数分解の可能性を認める解釈があるのか、を「原論」の定義や命題を通じて分析する。まず素因数分解の条件を考察する。素因数分解が可能がある為には、次の条件が必要である。(kは1以上の自然数とする)

(S1) 素数のk乗が数として定義されること。(より本質的には指数の概念の成立)

(S2) k個の数の積が定義されること。(計算上は、条件(S2)から条件(S1)が従う)

この2つの条件は、現代の初等整数論では無条件で成立している。それは数の四則演算(加減乗除)が成立するからである。しかし「原論」では、§2~§3で見たように数の四則演算ではなく、「測る」事を基本演算としているので、条件(S1)(S2)は自明なことではない。

まず「原論」で条件(S2)が成立するかを考える。§3で見たように「原論」では数の積は定義されている。ただしそれは、あくまで2数の積「 $a \times b$ 」(数bが数aを多倍した数)であって、安易にそこからk個の数の積が定義されるわけではない。なぜなら「原論」では3個の数の積までしか明確に定義されていない、と思えるからである。その事を示すのが以下の定義である。

(定義VII17) 2数が互いを多倍して何らかの数を作るとき、生じる数は平面数と呼ばれ、また互いに多倍する数はその辺と呼ばれる。

(定義VII18) 3数が互いを多倍して何らかの数を作るとき、生じる数は立体数であり、また互いを多倍する数はその辺と呼ばれる。

(定義VII19) 正方形数とは、等多倍の等しい数、あるいは2つの等しい数に囲まれる数である。

(定義VII20) 立方体数とは、等多倍の等しい数の等多倍、あるいは3つの等しい数に囲まれる数である。

数が線分で表された様に、2数の積、3数の積が平面数、立体数と呼ばれるの事に対しても、そこに“幾何学”の精神を感じ取ることができる。純粹に数学的な可能性としては、2数の積の定義(定義VII16)から、任意個数の数の積を帰納的に定義する事ができる。例えば4数の積は、4数を $a, b, c, d$ として、「 $abcd = d \times c \times a \times b$ 」(積の演算の合成法則の適用)となる。しかしその事を否定するかの様に、(定義VII16)の後に上の(定義VII17)~(定義VII18)が続くのである。点を0次元、線を1次元、面を2次元、立体を3次元と考えれば、幾何学的にそれより大きい次元は考えられない。つまり「原論」では、3数より多い数の積は禁止されているのであろうか? この事と関連して、§1で引用した斎藤の言葉をもう一度確認しよう。

### <斎藤憲のテーゼB>

「数を素因数の積として表すというアプローチは稀にしか見られず、素因数分解という観念自体が実質的に存在しない、ということである」

この理由として「「原論」の数論では、常に2数の積を繰り返し利用する形で証明が進められ、一挙に3個以上の数の積が利用されることはない」ということを、斎藤は指摘している。斎藤の解説から、その様な例として「原論」第8巻の命題2とその系(等比数列?)、第9巻の命題14(素因数分解の一意性?)、命題20(素数の無限性?)、命題36(完全数の定理)について考察してみよう。

### <1> (命題VIII2)

「与えられた比において順次比例する、指定するだけの(個数の)最小の数を見出すこと」

(系)

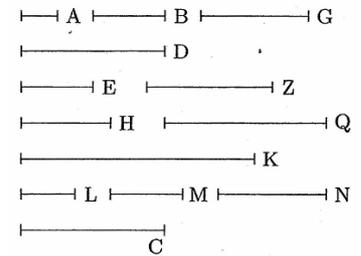
「個数が3のとき両端の数は平方数であり、個数が4のとき両端の数は立方体数である」

「原論」では個数が4の場合の、準一般的な証明が与えられている。それは「与えられた比が $a:b$ で項数が4の場合、 $x:y=y:z=z:w=a:b$ となる最小の数の組 $\{x, y, z, w\}$ を求めろ」という事である。現代的に翻訳すれば「公比 $b/a$ で項数4の等比数列で最小なものを決定する」という事であり、その解は公比 $b/a$ を既約有理数として $\{a^3, a^2b, ab^2, b^3\}$ である。(系)の言う通り、両端の数は立方体数である)

しかし「原論」の証明では、 $a$ 、 $b$  の 3 乗や 4 乗が一挙に登場する事はない。まず  $a:b$  となる比の中で互いに素なものを  $A:B$  とし、求める数  $\{Z, H, Q, K\}$  は次の様に構成される。まず  $G = [A \times A]$ 、 $D = [A \times B]$ 、 $E = [B \times B]$ 、とし、次に、 $Z = [A \times G]$ 、 $H = [A \times D]$ 、 $Q = [A \times E]$ 、 $K = [B \times E]$  と定める。

(その部分の原文)

そこで 4 個が指定されている [個数] とし、 $A$  がそれ自身を多倍して  $G$  を作り、また  $B$  を多倍して  $D$  を作るとし、さらに  $B$  がそれ自身を多倍して  $E$  を作るとし、さらに  $A$  が  $G, D, E$  を多倍して  $Z, H, Q$  を作るとし、また  $B$  が  $E$  を多倍して  $K$  を作るとしよう。



ここで重要な事は、初めから  $A$  の 3 乗が、 $Z = [A \times [A \times A]]$  の様に構成されていない事である。まず「 $A$  がそれ自身を多倍」して  $G = [G \times G]$  を作り、次に「 $A$  が  $G$  を多倍」して  $Z = [A \times G]$  が作られるのである。現代的に言えば、「原論」の乗法では、結合法則が同時に使われていない、と言えよう。

この事が (命題 VIII 2) に限ったことではなく、「原論」全体の特徴である事を、斎藤は「原論」の仏訳者ヴィトラックの言葉「エウクレイデスが 3 数の積を直接導入することはない」を通じて指摘している。「原論」ベルナルド・ヴィトラック仏語訳・解説、1990~2001) 従って、

(観察 5) 「原論」の乗法である「多倍する」の操作で、合成法則は同時には使われない。(重要) つまり、「 $a \times [b \times c]$ 」は、「 $b \times c = d$  かつ  $a \times d$ 」として得られる。

ただしこの命題の証明は、準一般的に項数が 4 個の場合を扱っているが、命題そのものは項数が任意の  $n$  個 ( $n \geq 4$ ) の場合も成立するので、 $A$  の  $n$  乗に相当する数も、「多倍する」という操作を、結合法則を使わずに 1 回ずつ  $n-1$  回繰り返す事によって作られる。

この事は重要であって、立体数や立方体数という言い方にもかかわらず、 $n$  個の数の積も上の操作によって作られる事が否定されているわけではない、と考えられる。

(観察 6)  $a$  の  $n$  乗に相当する数は、「 $a \times a = b$ 、 $a \times b = c$ 、 $a \times c = d, \dots$ 」という操作を  $n-1$  回繰り返して得られる。従って立体数や立方体数という言い方にも関わらず、 $n \geq 4$  のときにも  $n$  個の数の積は、上の様な構成を通じて、一つの数として認識されている。(従って、数の指数法則などは成立しない！)

ただ、これは「原論」の証明がその様に書かれているという事であり、「ギリシア人は合成法則を知らなかったので、 $a$  の  $n$  乗の数の概念はあったが、証明を書く時に多倍するという操作を繰り返して使った」という見方も出来なくはない。上の証明では、 $Z = [A \times [A \times A]]$  という表記法がなかったので、やむなく  $G = [G \times G]$  かつ  $Z = [A \times G]$  と分節化した、という見方である。

しかし (定義 VII 5) から「多倍する」が「測り切る」ことで定義されており、「測る」ことの方が「多倍する」より根本的な演算である事を考えれば、合成法則が同時に使われない理由がある程度説明することができる。まず (定義 VII 5) を、もう一度確認しよう。

(定義 VII 5) 大きな数が小さい数の多倍であるのは、小さな数によって測り切られるときである。

ここで「測る」とは、必ず 2 つの数 (または量) について「 $a$  を  $b$  が測る」という形である事に注意したい。(観察 3') より、

「数  $[ab]$  を数  $b$  が測り切る」 $\Leftrightarrow$ 「 $[ab] = [a \times b]$ 」  
 $\Leftrightarrow$ 「 $a$  で  $b$  を多倍した数が  $[ab]$  である」

となる。

このとき“測る”という操作は、合成法則には適合しにくい事がわかる。例えば、 $Z = [A \times [A \times A]]$  の場合、数  $A$  で数  $[A \times A]$  を多倍するためには、まず「 $A \times A$ 」が 1 つの数と認識される必要があるが、その為には数  $A$  で  $A$  を多倍する「 $A \times A = [AA]$ 」という操作が先に完了していなければならない。その意味で、「測る (測り切る)」=「多倍」するという操作は、1 回ずつ行う必要があり、上のヴィトラックの言葉となるのである。

(観察 7) 「原論」の数論では、「多倍する」は「測る (測り切る)」という操作に基づいており、数の乗法 (多倍する) において合成法則は同時的に使用しない。これが (観察 6) の理由である。(と思われる)

## < 2 > (命題IX14)

「(複数の) 素数によって測られる最小の数は、最初に (この数を) 測る素数以外の他のどの素数によっても測られることにはならない」

現代的に言えば「 $n$  個の異なる素数  $a, b, \dots, h$  を約数とする最小の数は、 $a \times b \times \dots \times h$  である」という事である。 §1 で紹介した様に、この命題は素因数分解の一意性と関連付けて説明される事が多い。 それらを、列挙してみよう。

(a) 「ギリシア数学史 (復刻版)」ヒース、共立出版、1998

「命題 14 は、<一つの数は一つのやり方でしか素因数に分解することはできない>という重要な定理に等しい命題である」

(b) 「ブルバキ数学史」東京図書、1970

「(命題 14 について) 言い換えれば、互いに異なる素数の積は、それらの素数以外の素因数をもたない。そこで、ユークリッドが一般的定理 (素因数分解?) を述べていないのは、単に、整数の任意のベキに対する適当な用語と記号法が欠けていたためらしい」

(c) 「タレスの遺産 (数学史と数学の基礎から)」三宅克哉 (訳)、1997

「命題 14 ではユークリッドは次のことを示している。 $n$  を平方因子をもたない正整数とすると、 $n$  の素因数への分解は (素因数を大きさの順に並べておけば) たた一通りである」

以上の言明では、素数の積への分解という意味で「素因数分解」が使われているが、「原論」の証明では、題意をみた最小の数が素数の積 (素因数分解) に明示的に表されるわけではない! そもそも 1 つの数を 3 つ以上の数の積に表すことは、(観察 6) (観察 7) によって「原論」では行われていない。(ヴィトラックの言葉! を思い出そう)

「原論」の証明は、やはり準一般的という事で、素数が 3 つ場合が考察されている。

### (証明の概略)

「異なる素数  $B, G, D$  によって測られる最小の数を  $A$  とする。(  $A$  は  $B, G, D$  の最小公倍数、第 7 巻・命題 36 により存在する) 注 6)

他の素数  $E$  が  $A$  を測ると仮定して矛盾を導く。(背理法)

$E$  が  $A$  を測る  $\Leftrightarrow E$  が  $Z$  を多倍すると  $A$  となる  $\Leftrightarrow$  「 $A$ 」 = 「 $E \times Z$ 」 (となる数  $Z$  が存在する)

このとき  $A$  を測る素数  $B, G, D$  は、 $E$  または  $Z$  を測る。(命題 VII30 による) 注 7)

$E$  は  $B, G, D$  と異なる素数なので、 $B, G, D$  は  $E$  を測ることはない。

よって、 $B, G, D$  は  $Z$  を測る。しかし  $A \neq E$  で、 $Z$  は  $A$  より真に小さい数である。

これは、 $B, G, D$  で測られる数  $A$  の最小性に反する。よって矛盾が導かれた。」

注 6) 命題 VII36 は「3 数が与えられたとき、それらが測る最小の数 (最小公倍数) を見出すこと」であるが、この証明を帰納的に繰り返すことにより、3 数以上でも最小公倍数を見出すことができる。そしてこの命題 VII36 も命題 VII34 「2 数が与えられたとき、それらが測る最小の数を見出すことができる」の拡張である。この命題 VII34 の証明では、2 数が素数のときそれらを測る最小の数は、それらの 2 数を互いに多倍した数として構成されている。つまり 2 数を  $A, B$  とするとその最小公倍数は、 $B$  を  $A$  が多倍した数「 $A \times B$ 」である。(命題 16 の積の可換性から「 $B \times A$ 」と同じ数) しかし 3 数が素数の時は、それらを  $A, B, C$  とし、まず  $D = A \times B$  とし次に  $E = D \times C$  とし最小公倍数  $E$  を構成しており、最初から「 $A \times B \times C$ 」として構成されているわけではない。ここにも上の (観察 7) で述べた事が本質的に現れている。

注 7) (命題 VII30) の内容は、現代的に言えば「素数  $p$  が合成数  $ab$  ( $a, b$  は 1 より大きい数) の約数であれば、 $p$  は  $a$  または  $b$  の約数である」という事である。

上の「原論」の証明では、 $A$  の最小性の条件が矛盾を導くために使われており、 $A$  を構成的に表す事  $A = 「B \times G \times D」$  は、行われていない。また一意性を示そうとする方針や文章も読み取れない。というわけで斎藤は「これは素因数分解の一意性よりも、かなり弱い定理である。英訳者ヒースはこれを素因数分解の一意性の定理と考えているが、ミュラーも指摘するようにこの解釈には無理がある。」と述べている。注 8)

またこの命題は、 $A$  の最小性という条件から、より一般的な素因数分解の特別な場合とはみなしにくい事も、斎藤はエウクレイデス全集のこの命題の解説で述べている。(以下、原文)

そして一般的に、素因数分解したときに 2 乗以上の素数の中を含む数、たとえば  $2^3 \times 3^2$  が他の素数によって測られないことは、本命題の議論からは証明できない。というのは、本命題の議論は数  $A$  の最小性を利用しているからである。

注8) ヒースも下記で、「原論」を翻訳・解説している。

「The Thirteen Book of the Elements」T.L.Heath、(2nd ed)、Dover、1956

また引用されたミュラー (Ian Mueller) の本は、下記である。

「Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements」MIT Press、1981

### < 3 > (命題IX20)

「素数は、どんな個数の素数が提出されても、それよりも多い」

現代的に言えば「素数は無限にある」という事であるが、“無限”という言葉は使われていない。例えば直線についても(第1巻・要請2)「有限な直線を連続して1直線をなして延長すること」とある様に、現代数学の直線と異なり、直線は最初から無限に伸びていると言う前提がとられているわけではない。一般に「原論」での直線は端点をもっているのが普通であり、その意味では現代数学の「線分」に相当する。「原論」第1巻では、斎藤が「無限な直線」と訳した表現も出てくるが、この無限の原語は“アペイロン”(端点がない)であり、積極的に「無限に伸びている」というよりも、状況に応じて必要なだけ伸びている、というニュアンスが強い。「原論」第10巻によく現れる「直線の上の正方形」についても、直線が無限であればその直線を一边とする正方形は作図できないので、ここでの「直線」も端点がある線分と解釈される。

さて、まず命題20の現代的証明を紹介しよう。(「タレスの遺産」1997より)

**証明：** 整数  $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$  を考える。明らかに  $n$  はどの  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) でも割り切れない。というのは、 $n$  を  $p_i$  で割れば余りが1だからである。上の補題から  $n$  が素因数  $q$  を持っている ( $n$  自身かもしれない) ことがわかっている。したがってこの素数  $q$  は与えられた  $p_i$  のどれとも異なる。これが証明すべきことであった。 □

このよく知られた証明では、「 $n = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$ 」が割り算の等式である事が本質的に使われている。しかし「原論」の証明では、まず上の2つの命題の様に  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$  の形の素数の積が明示的に表現されているわけではない。この理由は先の(観察7)で注意した様に、多倍する(測る)ことを作用として、同時に合成しないからである。(→注6も参照)

#### (証明の概略)

「準一般的な証明として与えられた素数を A, B, G の3個とし、それ以外の素数の存在を示す。

(命題IX14)と同様に、A, B, G によって測られる最小の数を DE とする。(最小公倍数)注9) DE に単位 DZ (1に相当)を加えた数を  $ED + DZ = EZ$  とする。(A×B×G+1に相当する)

ここで EZ が素数ならば命題は成立する。

もし EZ が素数でない(合成数)ならば、素数 H で測られる。

そこで H が A, B, G と異なる事を背理法で示す。

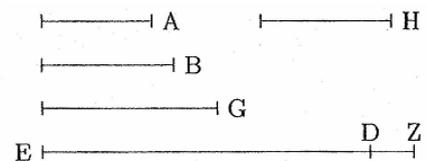
もし H が A, B, G のどれかと一致すると仮定すると、条件

より A, B, G は DE を測る、一方 H は EZ も測るので

EZ から ED を引いた残りの DZ も測る。しかしこれは、

DZ が単位なので起こり得ない、よって矛盾である。」

注9) DE が明示的に  $A \times B \times G$  と表されないのは、(命題IX14)と同じ理由である。(→注6を参照)



### < 4 > (命題IX36)

「もし単位から好きなだけの(個数)の2倍の比例にある数が、順次提示されて、それら全体を合わせたものが素数になるに至り、全体が最後の数へと多倍されて何らかの数を作るならば、生じる数は完全数になる。」

注10) 「原論」で完全数とは  $6 = 1 + 2 + 3$  の様に、約数の和と一致する数である。「原論」では、その数自身は約数と言わない。

この「原論」第9巻の最後の命題は、いわゆる完全数の定理と言われるもので、現代的には

(完全数の定理)「 $2^{m-1} - 1$  が素数ならば、 $2^{m-1}(2^{m-1} - 1)$  は完全数である」

と書かれる。

この定理の証明は素因数分解を用いると、下記のように簡単に出来る。(「タレスの遺産」1997より)

### 命題 IX 36 (完全数定理) の証明

もし  $p = 2^m - 1$  が素数であれば、 $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  の約数は (一意分解定理のお陰で)

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, \dots, 2^{m-1}p$$

で尽くされる。これらの約数の和は

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-1})(1 + p) \\ &= (2^m - 1)(1 + p) \\ &= 2(2^{m-1}(2^m - 1)) = 2n\end{aligned}$$

注 11) 上の証明では約数の和は現代的に  $n$  自身も含まれているので、「原論」の意味で約数の和は  $2n \cdot n = n$  となる。

上の現代的証明に比べると、原論」の証明は  $2^{m-1}$  という表記も出来ず、素因数分解の概念もなく、数列の概念や和の公式もなく、非常に長い道のりとなる。例えば、等比数列の代わりに、 $a:b=c:d=e:f=\dots$  という連続的比例の列が考えられている。数列の和の部分に相当する命題 35 については、比較的「原論」の証明に忠実な現代の記号を用いた翻訳が、「ギリシア数学の探訪」上垣渉、亀書房、2007、に載っているが、それもかなり長いものである。

(くわしい説明は、エウクレイデス全集の斎藤憲による数論解説および命題 36 の解説を参照)

以上の命題の分析から次の事が結論される。

(結論 3)

(観察 6) ~ (観察 7) によって、「原論」では数を素因数に分解をするという思想や表現は存在しない。つまり「原論」に素因数分解は書かれていない。

### §5 「原論」の“解釈”とは何か？

§4 の説明によって、「原論」の数論では、数の積としての素因数分解は書かれていないことが明らかになった。では、なぜ「原論」の数論に素因数分解の萌芽を見ようとする、ブルバキなどの現代の数学史観 (解釈) が生まれたのか？を考えてみよう。

(問題 2) なぜブルバキは、「原論」に素因数分解を見ようとするのか？

よく知られているように、ブルバキの主要著作は「数学原論 (*Éléments de mathématique*)」である。ブルバキはアンドレ・ヴェイユやアンリ・カルタンなどの当時の若手数学者たちにより構成され、「数学原論」は当時の数学を集合・位相・代数構造によって再構成して新しい数学の全体像を示そうとしたものである。この「数学原論」のシリーズに、「数学史」を加える事を提案したのがアンドレ・ヴェイユだそうであり、アンドレ・ヴェイユは現代の数論や代数多様体の研究の大家になった。(ヴェイユ予想などで有名)

この「数学原論」の「原論」は、まさにエウクレイデス「原論」の「原論」(英 Elements) と同じ意味であり、ここにブルバキの数学史観が大きく現れていると考えられる。つまりエウクレイデス「原論」が、現代の数学へ至る数学史の輝かしき原点である、という美意識？が現われている、と思われるからである。

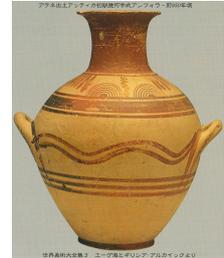
しかし純粋にエウクレイデス「原論」を見ると、そこにはギリシア人独特のエートス (美観) が現われている。それは「テオリア (観ること)」への、著しい愛好である。「原論」は平面幾何学で始まり、量や数が線分で考察され、立体幾何学で終わっている。最後の定理は、「正多面体は 5 つしか存在しない」であり、その 5 つの正多面体は、プラトン「ティマイオス」で、火・水・土・空気の 4 元素と宇宙 (形) に対比させら、火 : 空気 = 空気 : 水 = 水 : 土 (連続比例) として、コスモス (宇宙) の秩序を表現するイデア的存在として描かれている。

もともとプラトンが、アカデメイアで立体幾何学 (ステレオメトリア) の研究を推奨したのも、

この世界が3次元である事が大きな理由であり、それはピュタゴラス派のマテマタ研究から引き継がれたものであった。またプラトンのアイデアもアリストテレスのエイドス（形相）も、元々の意味は“**形象**”という事であり、アリストテレスが理論学（テオリア）における真理の観照（テオリア）を最高善と考えたのも、いかにギリシア人が「**テオリア（観ること）**」に固執していたかを現している。注12)

注12) ギリシア人の“**形象**”への愛好の原点となっているのが、右の原幾何学様式の壺絵である。暗黒時代以前のギリシア文化は、オリエント世界の周辺文化でしかなかったが、トロイア戦争後の暗黒時代になると、オリエント的な王政社会秩序の低下とともに、ギリシア人は外来の文化ではなく自らの感性に基づいた美意識を芸術に反映し始める。それが原幾何学様式であり、この延長線上にポリス黄金時代の神のごとき人間の彫像が生まれるのである。その様な彫像に見られる“**美の3要素**”として、アリストテレスは**均整（シュムメトリア）、秩序、限定性（形がはっきりして有限であること）**を挙げている。確かに科学革命まで続いた“**天球**”の概念は、この美の3要素を満たしていると思われる。このギリシア人のエトスについて、和辻哲郎は名著「風土」の中で、「雨が少なく空気が乾燥し、太陽光により物がくっきり見える」というギリシア独特の風土を理由に挙げている。

<原幾何学様式>



このギリシア人の「**テオリア（観ること）**」への愛好は、「原論」の数論においても本質的に現われている。数も線分で表されているが、最も根本的なのは「**数とは単位を合わせた多である**」という数の定義である。これは単位を\*とすれば、数は{\* \* . . \*}と表されるという事であり、例えば100に相当する数は\*を100個並べるという事であり、最初から「**数のデジタル化が否定されている**」とも解釈できるのである。この事は§2で説明した様に、モノコルド（一本弦の楽器）の弦の長さの比と数の比が対応させられて、数の比例論としての「**音階論**」がマテマタとして形成されたという歴史的事実が関係している。またピュタゴラス派の小石の数論も、小石を単位として、偶数や奇数や三角数や四角数を考えるものであり、初めから数のデジタル化を否定している。

つまり「原論」の数論は、数の数字による計算術である「代数学」が排除されているのである。

**（観察8）「原論」は「テオリア（観ること）」への愛好により、“幾何学”の精神で書かれている。そして数字を用いた代数学が排除されている。**

この事実から導かれる帰結として、「原論」第2巻などの「**幾何学的代数**」という解釈は、あくまで解釈であって、「原論」に“**代数は書かれてはいない**”という事である。斎藤憲は数学史という学問の立場から、“**代数は書かれてはいない**”という事実から「**幾何学的代数**」説を否定している。（ギリシア人が、バビロニアの操作的代数を知らなかったという意味ではない）注13)

注13) バビロニアの2次方程式の解法を、「原論」第2巻が領域付値の問題に“書き換えた”という「幾何学的代数」説は、ノイゲバウアーの論文（1936）に起因するが、「幾何学的代数」という名称自体は、ギリシア数学の研究者ソイテンが1880年代に与えた名称である。この「幾何学的代数」説を否定し再考をうながす数学家ウングルは、支持者であるヴェイユによって論文の掲載を妨害される、という事件があった。以上については、エウクレイデス全集・第1巻「原論I～V」（2008）の斎藤憲の解説を参照した。

「幾何学的代数」説の背景には、現代数学において「代数学（Algebra）」が果たしている役割が非常に大きい、という事実がある。まさにソイテンからノイゲバウアーに至る時代は、ガウス、デーデキント、ヒルベルト、ネーター、らによって、数論、代数学、代数的整数論、抽象代数学、が発展していった時代であった。「原論」の中に代数の起源？を見ようとする動機は、ある意味自然なものであろう。（代数学の発展がなければ、その様な見方は成り立たない）その延長線上に、「原論」の数論に素因数分解を見ようとする観点が生まれる。確かに素因数分解は現代の初等整数論の基本定理であるが、**素因数分解の一意性はガウスの「数論研究」（1801）において初めて正式に証明された**、というのは象徴的である。ガウス平面（複素数平面）を導入したのもガウスであるが、整数論を複素数に拡大したのもガウスである。ガウスは整数と同様に、 $a + bi$ （ $a, b$  は整数、 $i$  は虚数単位）の形の整数（ガウス整数と呼ばれる）を考え、そこで約数、素数の概念を導入し、（同伴を除いて）素因数分解の一意性を初めて証明した。 $a + bi$ の全体はガウス環  $Z[i]$  と呼ばれ、 $Z[i]$  では  $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$  の様に素因数分解されるので、整数環  $Z$  より広い  $Z[i]$  で整数論を展開することによって、ガウスは平方剰余・4次剰余の相互法則の研究を推し進める事ができた。その研究で本質的な役割を果たしたのが、 $Z[i]$  での**素因数**

分解の一意性であった。注14) ここで  $a \pm bi$  は共役な2次方程式の虚数解になるので、モニックな(最高次の係数が1)整数係数代数方程式の解としての、代数的整数を研究する代数的整数論の端緒となったとも言える。その後の代数的整数論や抽象代数学の発展によって、素数の概念は素元や素イデアルに拡張され、素元分解や素イデアル分解ができる代数的な環が、数論の研究の対象になっていった。その代数的構造については、下記の関係が知られている。

可換環  $\supset$  素元分解環(一意分解整域)  $\supset$  単項イデアル環  $\supset$  ユークリッド環  $\supset$  体

注14) ガウス整数と2次・4次剰余の相互法則の関係については、下記の本がわかりやすく説明している。

「ガウスの数論」高瀬正仁、ちくま学芸文庫、2011

上のユークリッド環というのは、整数  $\mathbb{Z}$  における割り算の等式に相当する概念が定義できる環のことで、例えば整数係数多項式環  $\mathbb{Z}[x]$  は、整式の割り算  $f(x) = Q(x)g(x) + r(x)$  ( $f(x)$  を  $g(x)$  で割ったときの商が  $Q(x)$  で余りが  $r(x)$  で、 $r(x)$  の次数  $<$   $g(x)$  の次数) によって、ユークリッド環になる。では、なぜ“ユークリッド”なのか? その理由としては、ユークリッド環では、ユークリッドの互除法に相当する概念が成立する事が挙げられる、例えば上の  $\mathbb{Z}[x]$  では、整数係数での因数分解が素因数分解に相当し、整式の割り算によってユークリッドの互除法が適用できて、整式での最大公約数が求められる。(ユークリッド環は素分解環なので、素因数分解の一意性が成立する)

以上の考察から(問題2)について、次の様な理由が考えられる。

(問題2の理由)

- (a) 「原論」第2巻を幾何学的代数と解釈する前提があり、「原論」に“書かれていない事”を“解釈”するという姿勢が、数学史の方法として許容されていた。
- (b) 「原論」の数論で、約数、素数、合成数、などの初等整数論の基本概念や命題があり、完全数の定理(第9巻命題36)も証明されているので、近代(ガウス以降)の初等整数論における基本定理である素因数分解とその一意性を、「原論」から読み取ろうとする“解釈”が生まれた。

しかし、§4の(結論3)で述べた様に、「原論」の数論に素因数分解は書かれていない。それは「原論」における、数の定義と「測る」という最も基本的な概念(思想)から導かれる帰結であり、また一方で素因数分解の一意性の重要性も、ガウス以降の近代の整数論で初めて認識されたという事を忘れてならない。その様な意味で、ブルバキ「数学史」の史観は、斎藤憲が指摘する「現代の数学を過去に投影する現代中心史観」(通俗的にホイッグ史観)と言えるかもしれない。まだ多くの本で「幾何学的代数説」などが、当たり前の様に述べられている現実からすると、斎藤憲らによるエウクレイデス全集の意義が、もっと多くの人に認められるを望みたい。それが、学問としての数学史・科学史の存在意義を、真に知らしめる事になろう。

最後に、数学者ヴェイユと数学史家ウンゲルの対立が象徴している様に、数学と数学史の違いの本質的な問題について考察してみたい。

(問題3)なぜ数学者は、書かれていない事を“解釈”しようとするのか?

この問題は、数学者と数学史家の目的の根本的違いに由来する。数学者は数学を“創っている”のであるが、数学史家は歴史学として“何が書かれているか”を探求している。しかし通常の歴史学と違い、数学史はどの様に数学が創られてきたか?という「内在史」的方法が不可欠である。つまり数学そのものを知らなければ、数学がどの様に創られてきたかはわからない、という事である。特に近代から現代の数学を理解するには、大学の数学科以上の知識が求められるであろう。一方、例えばギリシア数学を本格的に理解しようとするならば、ギリシア語の知識や背後にあるギリシア文化の理解が不可欠である。この点で斎藤憲は、エウクレイデス研究の世界的権威であり、現代語で書かれた翻訳・解説の最良・最新のものとして、エウクレイデス全集は世界的に誇れるものである。

実は“解釈の問題”は、科学史の世界でも起こっている。著名な物理学者のスティーヴン・ホーキングは、ニュートンの「自然哲学の数学的諸原理」(通称「プリンキピア」)について、微分積分学を用いて書かれていないのにもかかわらず、微分積分学による研究が前提になっている

という解釈を主張している。確かに「プリンキピア」には、幾何学的な極限概念は導入されているが、全体としてはエウクレイデス「原論」の様な、公理からの幾何学的論証という構成をとっていて、ホーキングの主張を裏付ける資料も見つかっていないし、若い時にデカルト流の普遍数学（代数解析）を研究し、流率法という独自の微分積分学を確立したニュートンではあるが、後にギリシア的な幾何学への愛着から、デカルト流の幾何学を「記号のかさぶた」と呼んで嫌悪した事を考えると、ホーキングの解釈には無理がある、というのが科学史家の一般的な見方である。

ここにも、「書かれていない事を解釈する」という姿があるが、ホーキングと数学者が共通しているのは、ホーキングも物理学者として物理学を“創ってきた”という事実であり、物理学に対する天才的な洞察力や美意識から、同じ物理学を創ってきたニュートンに対する深い“共感”の様なものとして、ホーキングの解釈が生まれてきた、だろうという事であり、そこにはホーキングの物理学者としての信念が介在している、はずであり単なる思いつきではないという事である。

（ただ残念ながら？ホーキングは、個人の意見を述べているだけであり、ブルバキの様に物理学史を書いたわけではない）

数学者にとって数学史とは何か？を考えると、高木貞治の「近世数学史談」の付録に入っている、杉浦光夫の解説が思い出される。杉浦はそこで、高木貞治の数学史に対する言葉を引用している。（「近世数学史談」岩波文庫、1995）

本書の著者高木貞治に、「わたしの好きな数学史」(『数学の自由性』所収)という文章がある。

「わたしの好きな数学史は正確なる史実の記録である、それは読み物としては乾燥無味でなければならない。数学史論は別である。史論は各人各様でなければならない。私の好きな数学史論は——面白い史論である。」

この分け方によると、本書は数学史ではなく、数学史論ということになる。無味乾燥な史実の記録ではなく、面白い議論で読ませるからである。

高木貞治は、1875年(明治8年)岐阜県本巣郡一色村数屋(現在糸貫町)に生れた。我々からするとガウスは、約200年昔の人であるが、高木にとっては、自分の生れる20年前に亡くなった人である。これは1965年頃生れた数学者が43年に死んだヒルベルトのことを考えるのとほぼ等しい時間間隔である。高木は「十九世紀以後の数学は概して言えば活きた数学で、それは「所謂数学史家」の領分外にあるものである。」(『わたしの好きな数学史』)と述べている。

逆に言えば、19世紀以後の数学ならば、数学史家でない数学者高木にとって、発言できるということであろう。

高木の数学史と数学史談の分類は明確であり、数学者としての矜持を感じさせられる。高木の数学史観からすると、ブルバキやヴェイユやホーキングの解釈は“史論”という事になるのであろうか？ただ高木貞治が生きていれば、斎藤憲らのエウクレイデス全集を“正確なる史実の記録”である「わたしの好きな数学史」として賞賛した事は間違いないだろう、と思われる。高木自身の「近世数学史談」は、いわゆる19世紀数学の“内在史”として、生き生きとその研究の発展の様子を描いている。高木の“史談”をもう少し一般的に言えば、歴史的エッセイと言うことになろう。ここでエッセイとは、簡単に言えば「感想文」であるが、モンテーニュの「エッセー」などもあり、自由で深い「試論」という意味もある。(欧米系の大学では、文系の学生の出すレポートや論文もエッセイと言われる)19世紀の数学史については、選ぶ題材や資料によって、高木とは別の史談(エッセイ)も可能であろう。(津田塾大数学史シンポジウムも、そのような自由で魅力あるエッセイに溢れており、杉浦光夫はシンポジウムの発起人の一人である)

では高木の指摘する“面白い”数学史談とは何であろうか？高木と言えば「解析概論」が有名であるが、「近世数学史談」も中心的な話題は複素関数論(数論と関係した楕円関数論)の発見と発展の物語であり、ガウス日記から出発して、コーシー、アーベル、ヤコービ、らの着想や数学史における役割が、時には彼らの研生活を送って生き生きと語られている。なぜ複素関数論なのかと考える時、複素関数論が19世紀数学の精華である事は確かであるが、記念碑的な高木類体論が、複素関数の解析的方法で証明されている事も無縁ではない、と思われる。(高木類体論によって、初めてクロネッカーの青春の夢が証明された)つまり高木の「近世数学史談」は、自らの研究に至る起源をたどるエッセイ、とも解釈できるのである。「数学史論は、各人各様でなければならない」と述べた背景には、本格的な数学研究には各人の内在史的な数学認識が必要であり、そこに数学の本質である“自由性”が反映している、という高木の洞察がある様に思えて仕方がない。

ただし高木が史談ではない数学史の基準を、“正確性”に置いている事にもう一度着目したい。書いてない事を解釈するのは、正確な数学史とは言えない。「近世数学史談」に登場する内容は、研究に至る過程ですべて高木が目を通した資料に基づいており、書かれていない事についての解釈はない、と思われる。ではもし高木がブルバキの「数学史」を読んだ時、「原論」の素因数分解の解釈について、どのような感想をもったであろうか？確かに、数学史談は各人各様であり“面白さ”を基準として自由であるが、数学者として証明に誤りがあれば、それは正しい数学として認められる事はない。斎藤憲らの数学史家も同様に、「原論」に“何が書かれているか”の正確性を学問的基準として研究を行っているのである。学問としての数学史において、面白いからと言って、正しいという事にはならない。その意味では、やはり正確な数学史は尊重されるべきであり、その上に面白い数学史談が書かれるべきであろう。以上から、私自身の個人的見解は以下の通りである。

#### (個人的見解)

数学者の歴史的エッセイは、数学の自由性とともにもっと自由である。それは数学者の研究上の歴史認識(美意識)と、深く結びついている。しかし数学史家は、学問として数学史の“何が書かれたか”を基準としている。それは数学者が、数学の証明において真理性を基準とする事と同じ態度であり、学問として尊重すべきものと思う。確かに、数学者の歴史的エッセイは“面白さ”が基準であるが、それが正しいとは限らない。正しいとは限らないという前提のもとで、その“面白さ”を楽しむべきであろう。

さて上で、もし高木がエウクレイデス「原論」を読んだらという仮定の話をしたが、そこで重要になるのが翻訳の問題である。19世紀以降の近世数学については、近代語で書かれており、ほぼ現代の数学記号と同じであり、読むことそのものに困難はないと思われるが、「原論」の場合はそうはいかない。エウクレイデス全集の解説で、斎藤は翻訳の難しさについて、一昔前の「原論」共立版、1971、と比較しながら言及している。例えば「原論」の量の理論や数論において決定的に重要な「測る」(原語メトレイ)について、共立版では「割る」と訳されている。この「割る」はもちろん割算の概念からの類推であろうが、§3~§4で示した様に「測る」は、いわゆる数字による割算とは異なる概念であり、それはエウクレイデスの交互差引法とユークリッドの互除法の違いに由来する。「測る」という翻訳は、ギリシア人自身がどう考えたか？について、より正しい認識をもたらしているのである。他にも色々と翻訳の違いはあるが、同じ「原論」でも共立版を読むかエウクレイデス全集(東大版)を読むかによって、印象が異なってくるのは事実であろう。エウクレイデスがどう考えたか？とは、近世で言えば、ガウスがどう考えたか？や、アーベルがどう考えたか？とまったく同様なのであり、その意味で、「原論」の真の姿を開示しようとする斎藤憲らの努力は、より正しいエウクレイデス理解をもたらすものとして賞賛すべきものと思う。