

漸近べき級数の起源

— ニュートンの無限級数 —

長田直樹 *

1 はじめに

漸近べき級数は 1886 年ポアンカレにより定義され、不確定特異点を持つ線形微分方程式の研究に用いられた。ポアンカレは論文 [15] をスターリング級数 (スターリングの公式) から始めている (図 1)。

$\log n!$ の漸近表示を与えるスターリングの公式は、1730 年にド・モアブル [3] とスターリング [18] によりほぼ同時に発表された。原典に沿った解説がダッカ [4], トウエドル [21], トドハンター [20](安藤訳 [1]), 真島 [9] などにある。

ド・モアブルは『級数と求積の様々な解析』補遺 [3](1730) で

$$\overline{m - \frac{1}{2} \log .m + 1 - m - \frac{1}{12} + \frac{1}{12m} + \frac{1}{360} - \frac{1}{360m^3} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1260m^5} + \frac{1}{1680} - \frac{1}{1680m^7} \&c}$$

は量 $\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4} \cdots 1$ の双曲線対数を表す。

と書いている。ここで上線は括弧で、 \log および双曲線対数は自然対数である。

ド・モアブルは、無限級数の和の順序を

$$\overline{m - \frac{1}{2} \log .m - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7} \&c} + 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} \&c \quad (1)$$

と変更し、

$$1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \cdots$$

* osada@lab.twcu.ac.jp

SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Séries asymptotiques.*

Tous les géomètres connaissent les curieuses propriétés de la série de STIRLING. Cette série:

$$\begin{aligned} & \log \Gamma(x+1) \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \frac{1}{x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{5 \cdot 6} \frac{1}{x^3} - \dots \end{aligned}$$

est toujours divergente. Cependant on peut en faire légitimement usage pour les valeurs très grandes de x . En effet les termes après avoir décréu avec une très grande rapidité, croissent ensuite au delà de toute limite. Mais si l'on s'arrête au plus petit terme, l'erreur commise sur la valeur de $\log \Gamma(x+1)$ est très petite.

En d'autres termes, la série de STIRLING représente asymptotiquement la fonction $\log \Gamma(x+1)$; c'est à dire que si S_n est la somme des premiers termes de cette série jusques et y compris le terme:

$$\pm \frac{B_n}{2n(2n-1)} \frac{1}{x^n},$$

l'expression

$$x^{n+1}[\log \Gamma(x+1) - S_n]$$

tendra vers 0 quand x croitra indéfiniment.

Acta mathematica. 8. Imprimé le 30 Juin 1886.

図1 [15]の冒頭ページ

が $\frac{1}{2} \log 2\pi$ に等しいというスターリングが得ていた結果を用いて、 $\log(m-1)!$ が

$$m - \frac{1}{2} \log m + \frac{1}{2} \log 2\pi - m + \frac{1}{12m} - \frac{1}{360m^3} + \frac{1}{1260m^5} - \frac{1}{1680m^7} \&c$$

と表せることを述べた [3, p.11]。

以下現代表記する。log m を加え、ベルヌーイ数^{*1}

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}$$

を用いてド・モアブルの結果を書き直すと

$$\begin{aligned} \log m! \sim & \frac{1}{2} \log 2\pi + \left(m + \frac{1}{2}\right) \log m - m \\ & + \frac{B_2}{1 \cdot 2} \frac{1}{m} + \frac{B_4}{3 \cdot 4} \frac{1}{m^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6} \frac{1}{m^5} + \frac{B_8}{7 \cdot 8} \frac{1}{m^7} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

となる。(2) は、スターリングの公式と呼ばれており、発散する漸近べき級数の最初の例^{*2} と考えられている。ド・モアブルの公式ではなくスターリングの公式と呼ばれているのは、 $\frac{1}{2} \log 2\pi$ がスターリングに負っているためのものである。

漸近べき級数の定義は確定していない^{*3}が、本論文では以下の定義を採用する。関数 $f(x)$ は十分大きな実数 x で定義されているとする。定数列 $\{c_n\}$ が存在し、任意の正の整数 ν に対し、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^\nu}\right) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3)$$

が成り立つとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$$

を $f(x)$ の漸近べき級数と呼び、

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}$$

^{*1} ベルヌーイ数 B_0, B_1, B_2, \dots は母関数 $\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ により定義できる。ヤコブ・ベルヌーイは遺著『推測術』[2, pp.97-98](1713)において、 $s_c(n) = 1^c + 2^c + \dots + n^c$ を $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}$ を用いて表したので、これらの数列はベルヌーイ数と呼ばれている。ポアンカレは[15]においては $B_1 = A, B_2 = -B, B_3 = C$ としている。関孝和も遺著『括要算法』[17]巻元(1712)において、ベルヌーイと同様に $s_c(n)$ ($c = 1, \dots, 11$) を n の多項式で表すため、 b_1, \dots, b_{12} を $1, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, +\frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, +\frac{5}{66}, 0$ により与えている。 $B_0 = b_1, B_1 = -b_2, B_n = b_{n+1}$ ($n = 2, \dots, 11$) である。

^{*2} たとえば、真島は「(スターリングの公式は) 発散級数を『漸近級数』とするはじめての例」[8]としている。

^{*3} (3) は『岩波数学辞典』第4版[11, p.683]の定義と同値である。また、『数学公式II』[10, p.163]では、条件(3)に級数 $\sum_{n=0}^{\nu} \frac{c_n}{x^n}$ が発散することを加え、名称は漸近級数である。なお、エルデリ『漸近展開』[5, p.12]は、非負べきのべき級数も漸近べき級数に含めている。

と表す。

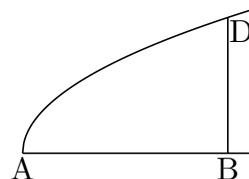
本論文では、収束か発散かを問わなければ漸近べき級数はニュートンまで遡れることを示す。ニュートンの論文はホワイトサイド編『ニュートン数学論文集』(MP と略す)[22], 「前の書簡」はターンバル編『ニュートン往復書簡集』[19]II 巻からそれぞれ日本語に翻訳し引用する。引用文中 [] 内は筆者の説明である。

2 『解析について』での求積

ニュートンは、1669 年『無限個の項をもつ方程式による解析について』(『解析について』と略す)において、分数関数や無理関数、あるいは陰関数など多項式で表せない実関数を無限級数で表すことにより、関数が表す曲線の面積などの近似値を項別積分で求める方法を提案した。その方法は 3 つの規則から構成されている。規則 I は $y = ax^{\frac{m}{n}}$ で表される曲線(ニュートンは単純曲線*4と呼んでいる)の求積、規則 II ではそれらの項別積分、規則 III では無限級数展開の求め方について述べている。

規則 I は、欄外に「単純曲線の求積」と見出しが付けられている。

規則 I もし $ax^{\frac{m}{n}} = y$ ならば、 $\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は ABD の面積になるだろう。
事柄は例によって明らかになるだろう。



MP II, pp.206-209

規則 I には 6 例が与えられており、最初の 3 例は $\frac{m}{n} > 0, a > 0$ であり、A は原点なので、現代表示すると

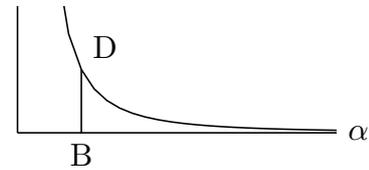
$$\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = \int_0^x ax^{\frac{m}{n}} dx = \text{ABD の面積}$$

となる。ABD の面積は曲線 $y = ax^{\frac{m}{n}}$ の積分定数を 0 とした原始関数に一致している。

つづいて、 $\frac{m}{n} < -1$ の場合が 2 例取り上げている。

*4 ニュートンの単純曲線は、単項式で表される曲線を有理数べきに拡張したものである。現代数学で単純曲線は、閉区間 I から位相空間 X への単射な連続写像の像を意味するので、 $m \neq 0$ のとき定義域を有界閉区間に制限すれば、ニュートンの単純曲線は現代数学の単純曲線になっている。

規則 I 例 4 もし $\frac{1}{x^2}(=x^{-2})=y$ ならば、すなわち、もし $a=n=1$ かつ $m=-2$ ならば、 $\left(\frac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}}=\right)-x^{-1}\left(=\frac{-1}{x}\right)=\alpha BD$ は α の方向に無限に広がっている。線分 BD の遠い方の側なので符号を負とおく。



MP II, pp.208-209

線分 BD の右側で曲線と x -軸で挟まれた「無限に広がっている」部分の面積は、今日では

$$\alpha BD = \int_x^\infty t^{-2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_x^b t^{-2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} (-b^{-1} + x^{-1}) = x^{-1}$$

とニュートンとは符号が反対であるが、ニュートンは線分 $BD = x^{-2}$ が描く領域の面積と曲線 $y = x^{-2}$ の積分定数を 0 とした原始関数が一致するように領域 αBD とその面積 $-x^{-1}$ を与えている。そのため、遠い方の側なので面積を負と定義している。ニュートンは巧妙な方法で、面積*5と原始関数を一致させたのである。

規則 II は、欄外に「そして単純曲線の複合」と見出しがつけられている。

規則 II もし y の値がそのようないくつかの項の複合 [和] ならば、それぞれの項の面積を独立にとった面積の複合 [和] になるであろう。

MP II, pp.206-209

項 $a_i x^{\frac{m_i}{n_i}}$ の面積は規則 I より $\frac{a_i n_i}{m_i + n_i} x^{\frac{m_i + n_i}{n_i}}$ だから、規則 II は無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{\frac{m_i}{n_i}}$ の面積すなわち原始関数は、それぞれの項の面積の和

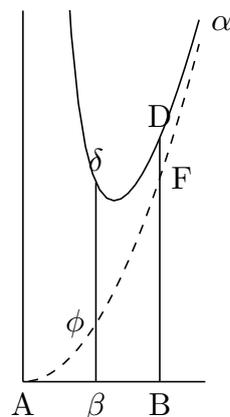
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i n_i}{m_i + n_i} x^{\frac{m_i + n_i}{n_i}}$$

すなわち、それぞれの項の原始関数の和*6 になる。

*5 ニュートンは、面積と原始関数を一致させる方法を『解析について』においてのみ用いており、二年後に執筆した『方法について』では面積は通常の意味で用いている。ニュートンは、ライプニッツとの先取権論争の最中の 1713 年に匿名で「ニュートン氏は彼の『解析について』において、曲線の面積により流量を表し、縦座標によりそれらの流率を表している」(MP II, p.273) と書いている。

*6 原亨吉は規則 I, II を「有理数 r について $\int \sum a_r x^r dx = \sum a_r x^{r+1}/(r+1)$ 」[7, p.289] と表している。

規則 II 第 3 例 $x^2 + x^{-2} = y$ のとき、 $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$ が描かれる面である。しかしここで、面の部分は線 BD の反対側にあることに注意すべきである。正確には $BF = x^2, FD = x^{-2}$ とおくと $\frac{1}{3}x^3$ は BF によって描かれる面 ABF で、 $-x^{-1}$ は DF によって描かれる面 DF α である。[後略]



MP II, pp.210-211

ニュートンは、線分 $BD = x^2 + x^{-2}$ が描く面を

$$ABF \cup DF\alpha$$

としている。カヴァリエリの原理により $DF\alpha$ と $BE\alpha'$ の面積は等しく、規則 I 例 4 よりその値は $-x^{-1}$ である。したがって、BD が描く面の面積は

$$\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$$

に等しい。この面積は $x^2 + x^{-2}$ の積分定数を 0 とした原始関数に一致する。ここで、 $BE = x^{-2}$ で、 α' は

x -軸上の無限遠点である。(点 E と α' 、および図 2 は、ニュートンの原文ではなく筆者が説明のために加えたものである。)

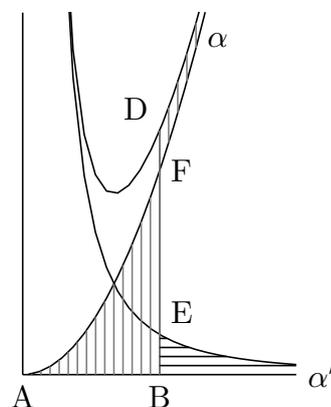


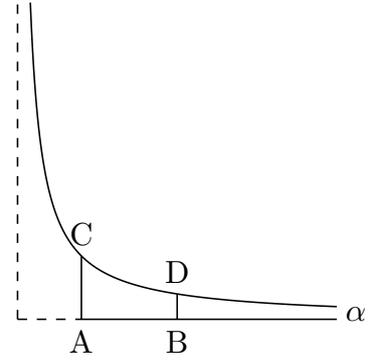
図 2

3 除算で得られる漸近べき級数

ニュートンは、『解析について』(1669)において、除算により得られるべき級数および漸近べき級数を与えている。

割り算による [還元] の例 $\frac{aa}{b+x} = y$ とせよ。その曲線は明らかに双曲線である。方程式をその分母から自由にするため割り算を以下のように実行する。

$$\begin{array}{r}
b+x)aa+0 \left(\frac{aa}{b} - \frac{aa x}{bb} + \frac{aa x^2}{b^3} - \frac{aa x^3}{b^4} \&c \right. \\
\frac{aa + \frac{aa x}{b}}{0 - \frac{aa x}{b} + 0} \\
\frac{-\frac{aa x}{b} - \frac{aa x^2}{bb}}{0 + \frac{aa x^2}{bb} + 0} \\
\frac{+\frac{aa x^2}{bb} + \frac{aa x^3}{b^3}}{0 - \frac{aa x^3}{b^3} + 0} \\
\frac{-\frac{aa x^3}{b^3} - \frac{a^2 x^4}{b^4}}{0 + \frac{aa x^4}{b^4} \&c}
\end{array}$$



そして、この方程式 $\frac{aa}{b+x} = y$ の代わりに、新しい方程式

$$\frac{aa}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4} \&c$$

が現れる。ここで、級数は無限に続く。規則 II の結果から ABDC の面積は

$$\frac{a^2 x}{b} - \frac{a^2 x^2}{2b^2} + \frac{a^2 x^3}{3b^3} - \frac{a^2 x^4}{4b^4} \&c$$

に等しくなるだろう。無限級数は最初の数項で役に立ち、 x が b よりかなり小さければ十分正確である。

同じ方法で、もし $\frac{1}{1+xx} = y$ ならば、割り算により $1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 \&c$ が生じる。よって、規則 II により $ABDC = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \&c$ となるだろう。あるいは、 xx を除数の第 1 項におき、同じように $(xx+1)1$ とすると、 y の値として $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \&c$ が現れるだろう。そして、規則 II により $BD\alpha = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7} \&c$ となるだろう。 x が十分小さいときは前者により実行され、十分大きいときは後者により実行される。MP II, pp.212-215

これらのうち、除算によるべき級数展開

$$\frac{a^2}{b+x} = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} - \frac{a^2 x^3}{b^4}$$

とそれへの項別積分の適用は、 $a = b = 1$ の場合ニコラス・メルカトルが『対数技法』(1668) で公表している。ニュートン自身は 1665 年に得ており、「1666 年 10 月論文」に記載していたが、発表してなかったため、ニュートンは先取権を主張するため『解析について』を執筆した。

ニュートンが最初の 4 項を与えた

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{-2n}$$

は $|x| > 1$ で絶対収束する漸近べき級数である。

江沢は「漸近展開とは、一つの級数展開で、その級数は必ずしも収束しないが、変数(あるいは、その逆数)が十分に小さければ有限和がよい近似を与えるようなものである」[6]と述べているが、ニュートンが書いている「無限級数は最初の数項で役に立ち、 x が b よりかなり小さければ十分正確である」「 x が十分小さいときは前者により実行され、十分大きいときは後者である」は、まさに漸近級数の性質である。

1660 年代後半から 1670 年代前半には、超越関数のべき級数展開は、ニコラス・メルカトルやジェームズ・グレゴリなどにより考察されていたが、 x が大きいときの負の整数べきの級数はニュートンが始めて扱った。

ニュートンが与えた $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \&c$ などの負数べきの級数展開は、1 節で述べた漸近べき級数の定義 (3) をみたしている。さらにニュートン自身、変数が十分に大きければ有限和がよい近似を与えるという漸近べき級数の性質を指摘している。したがって、ニュートンが漸近べき級数の発見者であるということが出来る。

4 開平で得られる漸近べき級数

ニュートンは、『解析について』において、開平により得られるべき級数を与えているが、漸近べき級数は与えてない。

開平による [還元] の例 もし $\sqrt{\quad} : aa + xx = y$ ならば、私はその根を以下のように抽出する。

$$\begin{array}{r}
aa+xx\left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\right)\&c \\
\hline
aa \\
0+xx \\
\hline
xx + \frac{x^4}{4aa} \\
\hline
0 - \frac{x^4}{4aa} \\
\hline
-\frac{x^4}{4aa} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\hline
+\frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\hline
0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}}\&c.
\end{array}$$

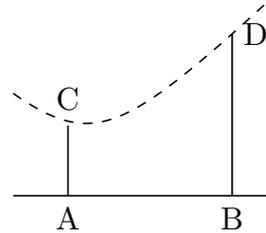
それゆえ、 $\sqrt{\quad}$: $aa + xx = y$ の代わりに新しい方程式、すなわち

$$y = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}\&c$$

が現れ、求める双曲線の面積は

$$ABDC = ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}\&c$$

となるだろう。



MP II, pp.214-217

開平による級数展開のアルゴリズム (筆算による開平を多項式に拡張したもの) については、[12] あるいは [13, pp.149-155] を見よ。

ニュートンは、1671 年に『級数と流率の方法について』(『方法について』と略す) において、べき級数を『解析について』で与えた上記の方法を少し改良した形で与え、さらに漸近べき級数を以下の様に付け加えている。

項の順序を $xx + aa$ の様に入れ替えると、根は $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}\&c$ となるだろう。

MP III, pp.40-41

ニュートンは開平により

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n}}{a^{2n-1}}$$

を7項目 ($n = 6$) まで導き、 x と a を交換することにより、漸近べき級数

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{a^{2n}}{x^{2n-1}} \quad (4)$$

を4項目 ($n = 3$) まで与えている。(4) は $0 < a < x$ で絶対収束する。

5 「前の書簡」での一般二項定理による漸近べき級数

「前の書簡」は、1676年6月にニュートンがオルデンバークを介してライプニッツに送った書簡である。一般二項定理

$$\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c \quad (5)$$

は「前の書簡」の冒頭第2段落で与えられ、9個の例を用いて丁寧に説明されている。ここで、 $P + PQ$ はべき根あるいはべきなどを求める量、 P はその第1項、 Q は残りの項を第1項で割った商である。 A, B, C, D, \dots は直前の項を表しているので

$$\begin{aligned} A &= P^{\frac{m}{n}} = \binom{\frac{m}{n}}{0} P^{\frac{m}{n}}, \\ B &= \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q = \binom{\frac{m}{n}}{1} P^{\frac{m}{n}} Q, \\ C &= \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q^2 = \binom{\frac{m}{n}}{2} P^{\frac{m}{n}} Q^2, \\ D &= \frac{m-2n}{3n} \frac{m-n}{2n} \frac{m}{n} P^{\frac{m}{n}} Q^3 = \binom{\frac{m}{n}}{3} P^{\frac{m}{n}} Q^3, \end{aligned}$$

である。したがって、(5) を現代表示すると

$$\begin{aligned} (P + PQ)^{\frac{m}{n}} &= A + B + C + D + \dots \\ &= P^{\frac{m}{n}} + \binom{\frac{m}{n}}{1} P^{\frac{m}{n}} Q + \binom{\frac{m}{n}}{2} P^{\frac{m}{n}} Q^2 + \binom{\frac{m}{n}}{3} P^{\frac{m}{n}} Q^3 + \dots \end{aligned}$$

となる。

第2例、第3例、第6例、第7例に漸近べき級数が登場する。そのうち、第2例は次のように書かれている。

例 2

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} \text{ (i.e. } \overline{c^5 + c^4x - x^5}^{\frac{1}{5}}) \\ &= c + \frac{c^4x - x^5}{5c^4} [+] \frac{-2c^8xx + 4c^4x^6 - 2x^{10}}{25c^9} + \&c \end{aligned}$$

は、上に引用した規則 [一般二項定理] において m に 1, n に 5, P に c^5 そして Q に $\frac{c^4x - x^5}{c^5}$ を代入すると明らかです。また、 P に $-x^5$, Q に $\frac{c^4x + c^5}{-x^5}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} \\ &= -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx + 4c^9x + [2]c^{10}}{25x^9} + \&c \end{aligned} \quad (6)$$

となります。最初の方法は x が非常に小さいときに選ばれ、第 2 は非常に大きいときです。 [19, pp.21-22,33]

ここで、 $\sqrt[5]{}$ および $\frac{1}{5}$ は 5 乗根を表す記号である。式 (6) を現代的に導くと

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5} &= -x \left(1 - \frac{c^4x + c^5}{x^5} \right)^{\frac{1}{5}} \\ &= -x \left(1 + \frac{1}{5} \left(-\frac{c^4x + c^5}{x^5} \right) - \frac{2}{25} \left(-\frac{c^4x + c^5}{x^5} \right)^2 + o(x^{-11}) \right) \\ &= -x + \frac{c^4x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8x^2 + 4c^9x + 2c^{10}}{25x^9} + o(x^{-10}) \\ &= -x + \frac{c^4}{5x^3} + \frac{c^5}{5x^4} + \frac{2c^8}{25x^7} + \frac{4c^9}{25x^8} + \frac{2c^{10}}{25x^9} + o(x^{-10}) \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。

6 『解析について』での複合方程式の文字解法

複合方程式とは、3 項以上からなる代数方程式である。ニュートンは、複合方程式を $y^3 - 2y - 5 = 0$ のような数値方程式と、 $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ のような文字方程式に分けている。 $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ は、 $y^3 + (a^2 + ax)y + (-2a^3 - x^3) = 0$ と考えると、 y に関する 3 項方程式で x と a が文字である。

ニュートンは『解析について』(1669) において、文字方程式 $f(x, y) = 0$ から y を x の無限級数として表す方法の説明に先立ち、 x や a などの文字を含まない数値方程式

$f(y) = 0$ から y の値を求める方法を扱っている。数値方程式の解法は、今日ニュートン法あるいはニュートン・ラフソン法と言われている方法の原型*7となるものである。

数値方程式の解法に引き続き、文字方程式の解法を扱っている。まず、

$$y^3 + aay - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

の商が

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \&c \quad (7)$$

になることを導いている。

$f(x, y) = y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3$ とおき、 y を x^n で打ち切った有限級数を y_n とすると、

$$f(x, y_n) = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0) \quad (8)$$

となる。たとえば、 $n = 3$ のとき、 $y_3 = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$ だから、 $f(x, y_3)$ を $O(x^4)$ で計算すると、 a^3, a^2x, ax^2, x^3 の係数はすべて 0 になるので、 $f(x, y_3) = O(x^4)$ 、すなわち $f(x, y_3) = o(x^3)$ である。以上より、 $f(x, y) = 0$ の $\phi(0) = a$ をみたく陰関数 $\phi(x)$ の $x = 0$ の廻りのべき級数展開が (7) である。

さらにニュートンは

$$y^3 + axy + xxy - a^3 - 2x^3 = 0$$

の商

$$y = x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512xx} + \frac{509a^4}{16384x^3} \&c \quad (9)$$

を与えている。 $f(x, y) = y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3$ とおき、 y を x^{-n+1} で打ち切った有限級数を y_n とすると、

$$f(x, y_n) = o(x^{-n+3}) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (10)$$

*7 たとえば、 $f(y) = y^3 - 2y - 5 = 0$ に対しニュートン法 (ニュートン・ラフソン法) は初期値 $y_0 = 2$ を適当に与え、 $y_{\nu+1} = y_{\nu} - \frac{f(y_{\nu})}{f'(y_{\nu})} = y_{\nu} - \frac{y_{\nu}^3 - 2y_{\nu} - 5}{3y_{\nu}^2 - 2}$ なる反復で根の近似値を求める方法である。一方、ニュートンの方法は初期値 $y_0 = 2$ に対し、 $y = y_0 + y_1 = 2 + y_1$ とおき $f(2 + y_1) = (2 + y_1)^3 - 2(2 + y_1) - 5 = 0$ 、すなわち $f_1(y_1) = y_1^3 + 6y_1^2 + 10y_1 - 1 = 0$ を 1 次式で近似した $10y_1 - 1 = 0$ を解いて $y_1 = 0.1$ を得る。次に、 $y_1 = 0.1 + y_2$ とおき、 $(0.1 + y_2)^3 + 6(0.1 + y_2)^2 + 10(0.1 + y_2) - 1 = 0$ 、すなわち $f_2(y_2) = y_2^3 + 6.3y_2^2 + 11.23y_2 + 0.061 = 0$ を 1 次式で近似した $11.23y_2 + 0.061 = 0$ を解いて $y_2 = -0.0054$ とする。このような反復を繰り返し、 $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = 2.09455148$ を近似値とする方法である。ニュートンの方法とニュートン法 (ニュートン・ラフソン法) は数学的には同値であるが、アルゴリズムは異なる。関孝和は『解隠題之法』[16](1685) でニュートンの方法に類似の方法を与えている。詳細は [13, pp.155-162] を見よ。

となる。たとえば $n = 4$ のとき、

$$y_4 = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$$

であるので

$$(y_4)^3 + axy_4 + x^2y_4 - a^3 - 2x^3 = o(x^{-1}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

である。 x が十分大のときの $f(x, y) = 0$ の陰関数 $\phi(x)$ の漸近べき級数展開が (9) である。

(7) および (9) を導出するアルゴリズムの説明は [12] あるいは [13]、(8) および (10) の証明は [13] あるいは [14] を見よ。

7 漸近べき級数の原始関数

『解析について』における複合方程式 $y^3 + axy + xxy - a^3 - 2x^3 = 0$ の文字解法の (9) 式に続いて、漸近べき級数の原始関数が述べられている。

商 $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512xx} + \frac{509a^4}{16384x^3} \&c$ を得るまで前の例と同様に進め。そして、面積は

$$\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2} \quad (11)$$

である。これに関連することは規則 II の第 3 例を見よ。[後略]

MP II, pp.226-227

ここで、 $\boxed{\frac{aa}{64x}}$ は現代の記号で表示すると積分定数を 0 とした $\int \frac{a^2}{64x} dx$, すなわち $\frac{a^2}{64} \log x$ である。「面積」は注*5 で述べたように原始関数を表している。したがって、(11) は漸近べき級数

$$x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512xx} + \frac{509a^4}{16384x^3} \&c$$

の原始関数である。ニュートンが言及している規則 II の第 3 例 (2 節参照) は、 $x^2 + x^{-2}$ の描く面 [の面積] が $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$ であることを述べている。

なお、『ニュートン数学論文集』の編集者ホワイトサイドは、おそらく面積を文字通り

に受け取り*8、(11)を

$$\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \left[\int \frac{a^2}{64x} \cdot dx \right] [+]\frac{131a^3}{512x} [+]\frac{509a^4}{32768x^2} \cdots$$

と [] をつけて訂正している [22, II,p.227] が、ニュートンの真意には沿わない解釈である。

8 ニュートンは何故漸近べき級数を考えたか

分数関数や無理関数、あるいは陰関数に無限級数の方法 (多項式で表せない実関数を無限級数で表すことにより、関数が表す曲線の面積などの近似値を項別積分で求める方法で、ニュートンは無限項の方程式による解析と呼んでいる) を適用する場合、 x が小さいときはべき級数 (非負整数べきの級数) で表すことができても、 x が大きいときは漸近べき級数 (負の整数べきの級数) が必要になる。

たとえば、 $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ を無限級数の方法で求める場合、

$$\frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots & 0 \leq x < 1 \\ x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - \cdots & x > 1 \end{cases}$$

より、 $0 \leq a < b < 1$ のときは

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots \right]_a^b$$

により、 $1 < a < b$ のときは

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[-x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \cdots \right]_a^b$$

により計算できるのである。漸近べき級数を使うことにより無限級数の方法の適用範囲が大幅に広がる。

べき級数のみを用いるときは、 $1 < a < b$ の場合 $x = \frac{1}{t}$ などと変数変換し

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{1+t^2}$$

の右辺により計算しなければならないが、一般には必ずしも使える方法ではない。

*8 規則 I 例 4 について「ニュートンが意図したことは、おそらく、積分区間を逆にしたものである：
 $\int_x^\infty x^{-2} \cdot dx = - \int_\infty^x x^{-2} \cdot dx = x^{-1}$ 」(MP II, p.209) と注をつけている。

また、複合方程式 $y^3 + axy + xxy - a^3 - 2x^3 = 0$ の x が大きいときの根 (一般的には x が大きいときの $f(x, y) = 0$ の陰関数) を無限級数で表すには漸近べき級数が必要になる。

ニュートンはこのようなことから、漸近べき級数を考え出したと思われる。そのため、「 x が十分小さいときは前者により実行され、十分大きいときは後者である」(MP II, p.215) 「最初の方法は x が非常に小さいときに選ばれ、第 2 は非常に大きいとき」[19, p.22] などの注意を随所に記載している。

9 おわりに

ニュートンは『解析について』(1669)の中で、除算および複合方程式 $f(x, y) = 0$ の文字解法 (x が大きいときの陰関数) により、負数べきの級数展開とそれらの原始関数を与えた。つづいて、『方法について』(1671) および「前の書簡」(1676)において、それぞれ開平および一般二項定理により負数べきの級数展開を与えた。

ニュートンが与えた負数べきの級数展開は、漸近べき級数の定義をみたしているばかりでなく、ニュートン自身「変数が十分に大きければ有限和がよい近似を与える」という漸近べき級数の核心を指摘しており、ニュートンが漸近べき級数の発見者であるということが出来る。ニュートンが発見した漸近べき級数は、彼から多大な影響を受けたド・モアブルとスターリングにより、1730年にスターリングの公式として結実した。

参考文献

- [1] 安藤洋美訳、アイザック・トドハンター原著、確率論史、現代数学社、改訂版、2002 ([20] の日本語訳)
- [2] Jacobi Bernoulli, *Ars Conjectandi*, Basileæ, 1713
<https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028894>
- [3] Abraham de Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, 1730, (Gale ECCO print editions)
- [4] Jacques Dutka, The early history of the factorial function, *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 43, No. 3 (1991), pp. 225-249
<https://www.jstor.org/stable/41133918>
- [5] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover, 1956
- [6] 江沢洋、漸近解析、岩波講座応用数学 14, 1995
- [7] 原亨吉、近世の数学、ちくま学芸文庫、2013

- [8] 真島秀行、Gevrey 漸近解析の小史と合流型超幾何関数のみたす D -加群の解複体について、RIMS 講究録、875 (1994), 57-71
- [9] 真島秀行、漸近解析入門、数学の楽しみ、24 (2001), pp.16-35
- [10] 森口繁一・宇田川銈久・一松信、数学公式 II、岩波書店、1957
- [11] 日本数学会、数学辞典第 4 版、岩波書店、2007
- [12] 長田直樹、ニュートンの『解析について』, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B71 (2018), 1-20
<https://www.lab.twcu.ac.jp/~osada/B71-1.pdf>
- [13] 長田直樹、ニュートン 無限級数の衝撃、現代数学社、2019
- [14] Naoki Osada, Literal resolution of affected equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B73 (2019), 1-20
<https://www.lab.twcu.ac.jp/~osada/B73-1.pdf>
- [15] H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta mathematica 8. (1886), 295-344.
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.acta/1485888541
- [16] 関孝和、解隠題之法、1685
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/G0000398tuldc_4100000852
- [17] 関孝和、括要算法、1712
<https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028417>
- [18] James Stirling, Methodus differentialis, G. Brower and Straham, London, 1730
https://archive.org/details/bub_gb_71ZHAAAAYAAJ/page/n143
- [19] H.W. Turnbull, The Correspondence of Isaac Newton, Vol II, Cambridge University Press, 1960
- [20] I. Todhunter, A History of Mathematical Theory of Probability, Cambridge and London, 1865, Repr. New York, 1949
<https://archive.org/details/ofmathemahistory00todhrich/>
- [21] Ian Tweddle, James Stirling's *Methodus Differentialis*, Springer, 2003
- [22] D.T. Whiteside, The Mathematical Papers of Isaac Newton, Vol.II,III, Cambridge University Press, 1968,1969.